

---

## **Seno e cosseno: a transição do triângulo retângulo ao círculo trigonométrico**

### **Sine and cosine: the transition from the right triangle to the unit circle**

Elisabete Marcon Mello<sup>1\*</sup>, Amarildo Aparecido dos Santos<sup>1</sup>

---

#### **RESUMO**

Esta pesquisa pretende apresentar uma sequência didática para a introdução da trigonometria, em particular as razões seno e cosseno, a alunos do primeiro ano do Ensino Médio, fazendo a transição entre o estudo dessas razões no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico. Para isso, iniciou-se os trabalhos com algumas construções geométricas com régua e compasso e com o uso do *software* Cabri-Géomètre. A geometria desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Essa sequência didática foi organizada observando-se as fases da aprendizagem descritas na Teoria Das Situações Didáticas de Gui Brousseau.

**Palavras-chave:** Trigonometria; Triângulo retângulo; Teoria das Situações Didáticas.

---

#### **ABSTRACT**

This research intends to present a didactic sequence for the introduction of trigonometry, in particular the sine and cosine ratios, to first year high school students, making the transition between the study of these ratios in the right triangle and in the unit circle. For this, work began with some geometric constructions with ruler and compass and with the use of the software Cabri-Géomètre. Geometry plays a fundamental role in the curriculum, as it allows the student to develop a particular type of thinking to understand, describe and represent, in an organized way, the world in which they live. This didactic sequence was organized observing the phases of learning described in the Theory of Didactic Situations by Gui Brousseau.

**Keywords:** Trigonometry; Right triangle; Theory of didactic situations.

---

---

<sup>1</sup> Universidade Federal do ABC.

\*E-mail: marcon.elisabete@gmail.com

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho é apresentada uma sequência didática para a introdução da trigonometria, em particular as razões seno e cosseno, a alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Nessa sequência didática parte-se de algumas construções geométricas com régua e compasso e, também, com o uso do *software* Cabri-Géomètre. Segundo os PCN (BRASIL, 1998), as tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas, e ainda, de acordo com o documento, tudo indica que pode ser uma grande aliada do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros.

O objetivo desse trabalho é tornar o aprendizado das relações trigonométricas seno e cosseno mais significativo para alunos do início do Ensino Médio, tendo condição de utilizar esse aprendizado e ampliá-lo nas séries seguintes, para isso foi organizada uma sequência didática observando as fases da aprendizagem descritas por Brousseau (1986) na Teoria Das Situações Didáticas.

## BROUSSEAU E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Brousseau (1986) apresenta um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o ambiente (*milieu*) no qual a aprendizagem deve se desenvolver. Segundo o autor, uma concepção de ensino requer que o professor provoque uma adaptação de seus estudantes a problemas que são apresentados a eles. Esses problemas são escolhidos de forma que permitam ao aluno agir, falar, pensar e evoluir de forma autônoma.

Para analisar o processo da aprendizagem, a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996) decompõe esse processo em quatro fases diferentes. Nessas fases interligadas, pode-se observar momentos de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.

Dialética da ação: consiste em colocar o aprendiz numa situação de ação, apresentando-lhe um problema cuja melhor solução é o conhecimento a ensinar. O aluno deve poder agir sobre essa situação e ela deve lhe retornar informações sobre sua

ação. O aluno realiza uma ação sem preocupação com a teoria que justifique o resultado.

Dialética de formulação: nesta fase o aluno troca informações com uma ou várias pessoas. É o momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que ele utilizou e a solução encontrada. Nessa fase ainda não há a necessidade de justificar a validade de sua resposta.

Dialética da validação: é nesse momento que o aprendiz deve mostrar a validade do modelo que criou, submetendo esse modelo ao julgamento de um interlocutor. É um momento de socialização do saber. O professor pode promover debates entre os alunos para que eles reflitam sobre a certeza das afirmações formuladas nos momentos de ação e formulação.

Dialética da institucionalização: são situações em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos.

## SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Procuramos criar uma sequência de atividades que permita ao aluno utilizar os conhecimentos que possui para construir novos e que o leve a reconhecer problemas, buscar e selecionar informações e tomar decisões para resolvê-los.

Para isso, foi utilizado o *software* de geometria dinâmica Cabri-Géomètre, que permite construir todas as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso. Uma vez construídas, as figuras podem ser manipuladas conservando as propriedades de construção. Essa possibilidade de deformação permite o acesso rápido e contínuo a todos os casos, constituindo-se numa ferramenta rica de validação experimental de fatos geométricos.

### **Atividade 1:** Construção de triângulos usando régua e compasso

Antes de iniciar a primeira questão é necessário um tempo para que os alunos se familiarizem com o manuseio do compasso. Para isso podem ser propostas atividades diversas, à escolha do professor.

Questão 1.1 – Nesta primeira questão foi solicitado que o aluno construísse um triângulo de medidas 5 cm, 6 cm e 9 cm usando apenas o lápis e a régua.

Nesta questão, muitos alunos têm dificuldades para construir o triângulo com as medidas exatas usando apenas a régua. Os dois primeiros lados eles constroem com facilidade, mas, para acertar a medida do terceiro lado e fechar o triângulo, geralmente há dificuldade. Neste momento o professor ressalta essa dificuldade e introduz o uso do compasso para facilitar a construção.

Nessa questão o aluno está agindo sobre a situação apresentada, percebendo as dificuldades de uma atividade aparentemente simples, construir um triângulo. É a fase da ação na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996).

Questão 1.2 – Na segunda questão foi pedido para que os alunos construíssem um triângulo de medidas 5 cm, 6 cm e 9 cm usando régua e compasso.

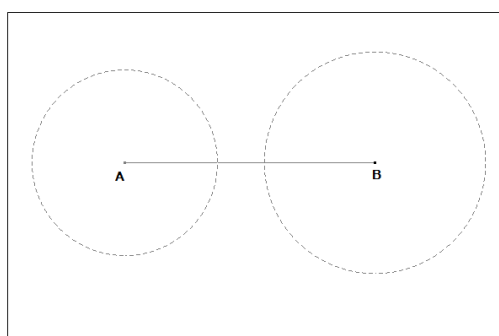
O objetivo é definir circunferência como um lugar geométrico e fazer com que os alunos percebam como o uso do compasso pode ajudar nessa construção. Podem ser propostos outros exercícios do mesmo tipo para aperfeiçoamento da técnica.

De acordo com a teoria de Brousseau (1996), o aluno está agindo sobre a situação e pode trocar informações com colegas, e até mesmo com o professor, socializando as informações sobre a atividade. São as fases de ação e formulação.

Questão 1.3 – A proposta da terceira questão é construir um triângulo de medidas 3 cm, 4 cm e 8 cm usando régua e compasso.

O objetivo é que os alunos percebam a impossibilidade de se construir um triângulo cuja soma das medidas de dois lados seja menor que a medida do terceiro lado.

**Figura 1:** Verificação da impossibilidade de construção triângulo



Nessa atividade o aluno tem oportunidade de agir sobre a situação que lhe foi apresentada, de encontrar um problema e ter a chance de discutir com os colegas o porquê não chegou ao resultado esperado. Dessa forma temos as fases de ação e formulação da teoria de Brousseau (1986). A partir do momento que conseguirem explicitar as suas conclusões, temos também a fase da formulação. E, ainda, quando valida seus argumentos, a fase de validação.

No momento em que o professor formaliza a condição de existência do triângulo, fixando convencionalmente o estatuto cognitivo do saber, temos a fase da institucionalização.

**Atividade 2:** Nesta atividade serão propostas construções de triângulos usando o software Cabri-Géomètre.

Antes de iniciar esta atividade, é necessário um tempo para que os alunos se familiarizem com o uso do software.

Questão 2.1 – Nesta questão, utilizando o software Cabri-Géomètre, o aluno deve construir um triângulo de medidas 5 cm, 6 cm e 9 cm.

É interessante propor a construção de outros triângulos, com medidas diferentes, para que os alunos se acostumem a utilizar o Cabri- Géomètre e explorem seus recursos.

O aluno está investigando e explorando as possibilidades do uso do *software* e realizando uma tarefa conhecida, apenas com um instrumento diferente. Temos a fase da ação.

Questão 2.2 – A proposta da segunda questão é que o aluno construa um triângulo retângulo, utilizando o *software* Cabri-Géomètre.

O aluno pode explorar o *software* e perceber que existem várias formas dele resolver essa questão. Ele pode construir um triângulo usando a ferramenta “triângulo” do *software* e, ajustar a medida do ângulo de 90° movendo um dos pontos do triângulo. Ele pode construir um segmento, uma reta perpendicular a um de seus extremos e depois fechar o triângulo. O importante é o aluno ter a oportunidade de interagir com o *software* e compreender os conceitos relacionados ao exercício.

Dessa forma, o aluno tenta encontrar sua própria forma de resolver a questão que lhe foi proposta e poderá compartilhar com os colegas as possíveis soluções. Temos as fases de ação e formulação. Se eles puderem comprovar a validade de suas soluções, teremos também a fase de validação.

Questão 2.3 – Nessa questão, utilizando as ferramentas do *software*, o aluno deve medir os lados do triângulo e identificar os catetos e a hipotenusa. Além disso, deve verificar se vale a relação: “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

Os alunos podem utilizar a calculadora do próprio Cabri-Géomètre para fazer o cálculo do teorema de Pitágoras. É possível que encontrem uma diferença de valores, neste caso devemos explicar que as medidas são valores aproximados, é uma oportunidade para abordar o conceito de números irracionais.

Questão 2.4 – Nesta questão, usando as ferramentas do *software*, os alunos deverão medir os ângulos internos do triângulo e calcular a soma desses ângulos.

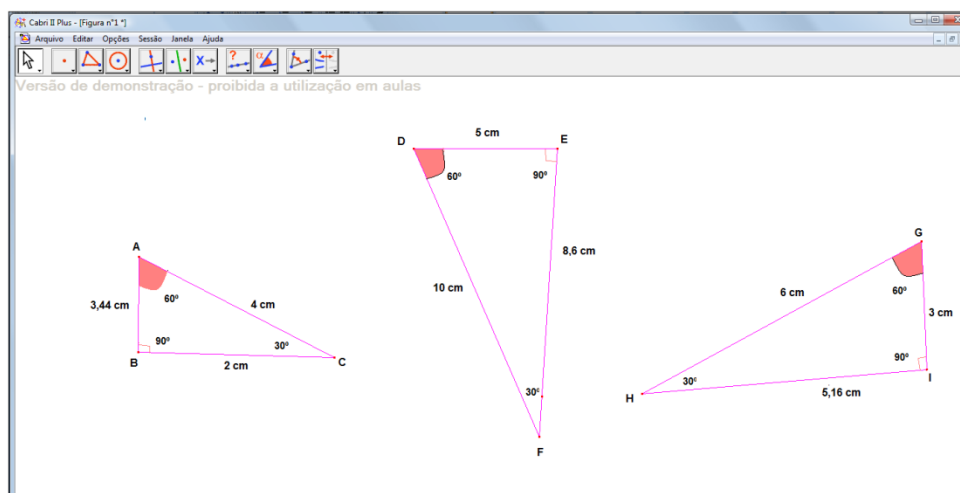
Podemos pedir para os alunos construírem outros triângulos diferentes e confirmarem que: “A soma dos ângulos internos dos triângulos é igual a  $180^\circ$ ”.

Neste caso é possível observar as fases de ação, por parte do aluno, e institucionalização por parte do professor ao formalizar o conceito. Se forem oferecidas outras situações que levem os alunos a discutirem seus resultados e validarem suas conclusões, poderemos observar, também, as fases de formulação e validação.

**Atividade 3:** Nesta atividade são propostas questões para a introdução do cálculo das razões Seno e Cosseno.

Questão 3.1 – A proposta dessa questão é que, utilizando o arquivo “triângulos retângulos 1”, criado previamente no *software* Cabri-Géomètre (figura2), o aluno identifique a hipotenusa e os catetos, opostos e adjacentes, em relação ao ângulo marcado em cada triângulo.

**Figura 2:** Arquivo “triângulos retângulos 1”



Fonte: dos autores

A partir da observação dos triângulos, os alunos devem identificar suas características e classificar seus lados em catetos ou hipotenusa.

Questão 3.2 – Nesta questão, ainda utilizando os triângulos do arquivo “triângulos retângulos 1”, os alunos deverão calcular a razão  $\frac{\text{cateto.oposto}}{\text{Hipotenusa}}$  para cada ângulo marcado e descrever o que observou.

Espera-se que os alunos percebam que, para ângulos iguais, as razões são iguais. Neste momento o professor define essa razão constante como sendo o seno do ângulo.

Questão 3.3 – Nesta questão, para cada triângulo da questão anterior, os alunos devem calcular a razão  $\frac{\text{cateto.adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$  e descrever o que observaram.

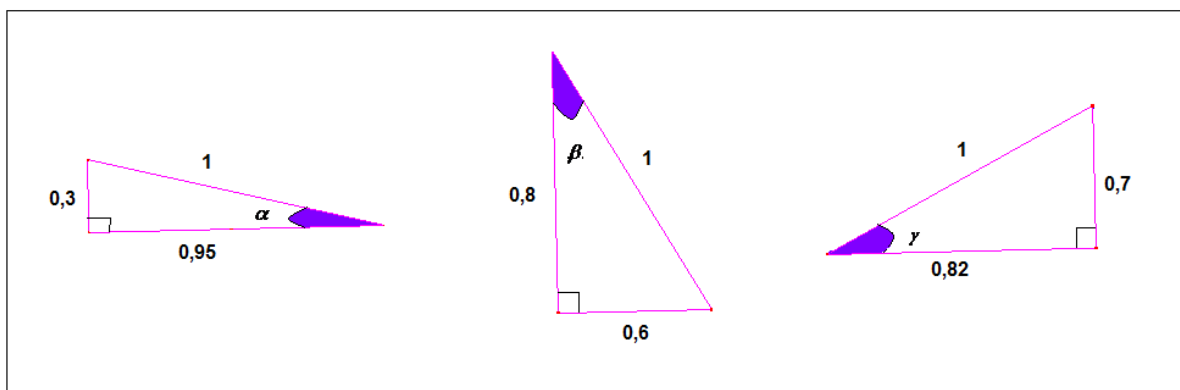
Novamente, espera-se que os alunos percebam que, para ângulos iguais, as razões são iguais. Neste momento o professor define essa razão constante como sendo o cosseno do ângulo.

A atividade 3 envolve as dialéticas da formulação e institucionalização. Formulação na análise das figuras e, na intervenção do professor, a institucionalização dos saberes desejados.

**Atividade 4:** Com essa atividade pretende-se introduzir o ciclo trigonométrico.

Questão 4.1 – Nesta questão, utilizando o arquivo “triângulos retângulos 2” já criado no *software* Cabri-Géomètre (figura 3), o aluno deve calcular o seno e o cosseno dos ângulos marcados e relatar o que observou.

**Figura 3:** Arquivo “triângulos retângulos 2”



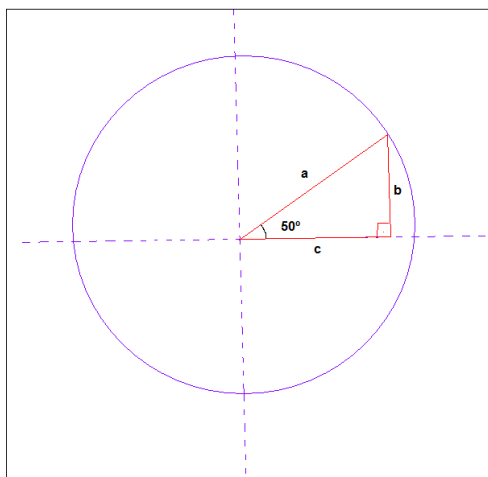
Fonte: dos autores

Espera-se que o aluno perceba que quando a hipotenusa mede 1, a razão seno corresponde à medida do cateto oposto e a razão cosseno corresponde à medida do cateto adjacente.

Questão 4.2 – Considerando que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos que distam uma medida  $r$  (raio) de um ponto fixo  $O$  (centro), se construirmos uma circunferência de raio=1, teremos o lugar geométrico de todos os pontos que distam 1 do centro. Sendo assim, solicitamos que o aluno observe o triângulo retângulo construído dentro da circunferência de raio 1 (figura 4) e determine a medida de seus lados, observando a medida de seus ângulos.

Obs: sugerimos que o aluno consulte uma tabela de seno e cosseno.

**Figura 4:** Triângulo retângulo na circunferência de raio 1



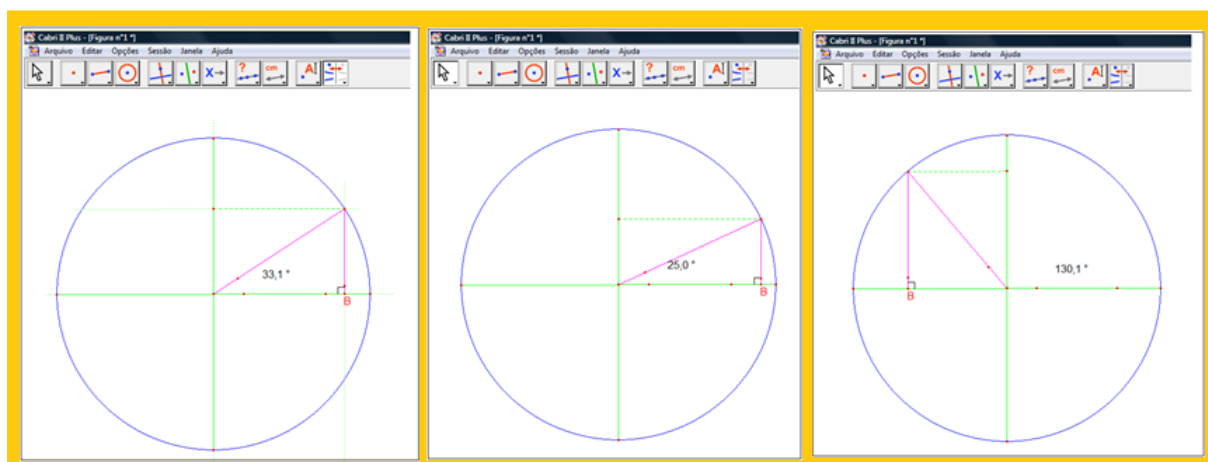


Espera-se que o aluno perceba que o lado ‘a’ corresponde à hipotenusa do triângulo e, também ao raio da circunferência, portanto mede 1. Dessa forma, se a hipotenusa mede 1, o lado b, que é o cateto oposto ao ângulo de  $50^\circ$ , tem medida igual ao seno de  $50^\circ$  e o lado c, que é o cateto adjacente ao ângulo de  $50^\circ$ , tem medida igual ao cosseno de  $50^\circ$ .

Questão 4.3 – No arquivo “circunferência”, construído previamente no Cabri-Géomètre (figura 5), há um triângulo retângulo construído dentro de uma circunferência de raio igual a 1. O aluno deve movimentar o ponto ”B”, observar as medidas dos ângulos e dos lados dos triângulos e responder à seguinte questão: “Você acha que, se definíssemos as retas perpendiculares que passam pelo centro da circunferência como os eixos coordenados do plano cartesiano, poderíamos marcar nele os senos e cossenos de qualquer ângulo? Em que eixo deveria ser definido o seno e em qual eixo o cosseno? Justifique”.

Nessa questão é importante permitir que os alunos discutam suas ideias com os colegas sem a intervenção do professor. O *software* dinâmico permite que o aluno aja sobre o problema, realizando experiências e observando os resultados de uma forma interativa. É importante também, permitir que eles exponham suas conclusões e reflitam sobre sua validade.

**Figura 5:** Arquivo “Circunferência” – movimentação do ponto B



A partir desse exercício o professor poderá introduzir o ciclo trigonométrico, esclarecendo que, nessa circunferência, pode-se representar qualquer medida de ângulo e explicando os valores de seno e cosseno negativos.

A atividade 4 permite ao aluno interagir com a situação proposta, experimentar e julgar o resultado de sua ação. Em conjunto com seus colegas, ele pode comunicar suas estratégias de solução, discuti-las e refletir sobre elas. Ao final, o professor intervém oficializando o ensino das relações trigonométricas e a representação no ciclo trigonométrico, analisando as definições, linguagem, notações e automatizando técnicas de utilização para que o aluno seja capaz de resolver outras situações que envolvam esse saber. Assim podemos observar as quatro fases definidas por Brousseau (1996): ação, formulação, validação e institucionalização.

Essa sequência de questões fornece uma introdução para o assunto, até onde chegar e quais conceitos introduzir, fica a critério de cada professor, pois, dependerá da turma e de seu planejamento.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Neste trabalho foi apresentada uma sequência didática que foi aplicada a alunos do primeiro ano do Ensino Médio e favoreceu a aprendizagem das razões trigonométricas seno e cosseno e o entendimento do ciclo trigonométrico por esses alunos.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, (BRASIL, 2006), no que se refere ao estudo das funções trigonométricas, destaca-se o trabalho com a trigonometria que deve anteceder a abordagem das funções seno, cosseno e tangente, priorizando as relações métricas no triângulo retângulo e as leis do seno e do cosseno como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no Ensino Médio. Essa sequência de atividades procurou seguir essa orientação, partindo das relações no triângulo retângulo e seguindo rumo ao ciclo trigonométrico.

Procuramos seguir os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996) propondo atividades nas quais pudéssemos observar momentos de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. Esperamos poder oferecer aos alunos a oportunidade de experimentar a sensação perturbadora do “desequilíbrio” e

a satisfação do novo saber adquirido. As atividades visam permitir ao aluno agir (sozinho ou em grupo) e mobilizar saberes antigos para adquirir novos.

Esse trabalho faz apenas a introdução ao ciclo trigonométrico, abordando o seno e o cosseno, sendo interessante o desenvolvimento de uma nova sequência didática para trabalhar as demais relações trigonométricas. Ressaltando que, essa mesma sequência didática pode ser aplicada utilizando outro software de geometria dinâmica, como, por exemplo, o GeoGebra.

## REFERÊNCIAS

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Terceiros quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o Ensino Médio; volume 2)

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p.35-113.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**. Recherche en didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.7.2, p.33-115, 1986.

*Recebido em: 30/04/2022*

*Aprovado em: 25/05/2022*

*Publicado em: 01/06/2022*