DOI: 10.53660/CONJ-2289-23A01

Construção de um Algoritmo Intuitivo Geométrico (AIG) para a operação de divisão de frações

Construction of an Intuitive Geometric Algorithm (AIG) for the fraction division operation

Cícero José da Silva[1], Willames de Albuquerque Soares*

RESUMO

Como é sabido, a grande maioria dos alunos operam a divisão de frações de forma mecânica, sem a compreensão do que está realizando. Este artigo consiste na exposição de um processo para a operação de divisão de frações. A proposta de ensino apresentada consiste na mudança da unidade fundamental, que é o elemento neutro multiplicativo para o valor de uma área de valor comum as frações, tornando-as em números inteiros. Como resultado é apresentado um algoritmo intuitivo geométrico (AIG) e o mesmo é aplicado a algumas situações. Ao utilizar o AIG, os conceitos sobre frações e a operação de divisão de frações são apresentados como áreas planas geométricas e são compreendidas intuitivamente de uma forma rápida.

Palavras-chave: Ensino; Números racionais; Áreas;

ABSTRACT

As is known, the vast majority of students operate the division of fractions mechanically, without understanding what they are doing. This article consists of exposing a process for the division of fractions. The teaching proposal presented consists of changing the fundamental unit, which is the neutral multiplicative element for the value of an area of common value to fractions, turning them into whole numbers. As a result, an intuitive geometric algorithm (AIG) is presented and the same is applied to some situations. When using AIG, concepts about fractions and the operation of dividing fractions are presented as flat geometric areas and are intuitively understood in a quick way.

Keywords: Teaching; Rational numbers; Areas;

[1] Instuição de afiliação: Universidade de Pernambuco
*E-mail: was@poli.br

INTRODUÇÃO

No âmbito educacional, fração é um dos conteúdos de maior importantes existentes na Matemática no Ensino Fundamental, todavia, é um dos temas em que os alunos mais apresentam dificuldades. Não apenas em uma série específica; mas sim, por toda a vida escolar, visto que muitos o entendem como sendo “fácil”, e não se dispõe a aprender o conteúdo, e assim, se perpetuam as dificuldades (SANTOS E FONSECA 2019).

De acordo com a literatura, o processo de aprendizagem das operações básicas aplicadas as frações é complexo e permeia todos os anos do ensino fundamental (SANTOS; SANTOS; CAMPOS, 2013; KILPATRICK; SWAFFORD; FINDELL, 2001; LOPES, 2008; MOREIRA; DAVID, 2005). Dentre as quatro operações, a divisão de fração por fração é vista como a de menor compreensão, onde os alunos aprendem uma regra e não entendem o que estão realizando (ISIKSAL; CAKIROGLU, 2007; KRIBS-ZALETA, 2006)

Em geral, no ensino fundamental a divisão de frações não é tratada intuitivamente ou com representações geométricas, o que ajudaria na compreensão do conteúdo; mas, como a memorização da frase: "dividir uma fração por outra, basta fixar a primeira fração e multiplicar pelo inverso (mágica) da segunda fração". Em muitos casos, o professor ensina desta forma porque aprendeu desta forma também. Salvo nos casos que sejam apresentadas apenas uma fração, usam recursos geométricos, como desenhos de pizzas, quadrados e retângulos.

Moriel Junior; Wielewski e Carrill (2019), buscaram qual o conjunto de conhecimento é necessário para que um professor possa ensinar a divisão de frações. Para tal, eles realizaram uma revisão sistemática de literatura em seis bancos de dados. Eles observaram que às principais contribuições podem ser divididos em cinco grandes blocos temáticos, a saber: 1. Definições e notações; 2. Algoritmos, suas justificações e outros procedimentos; 3. Interpretações e problemas associados; 4. Explicações instrucionais, propostas de ensino e recursos didáticos; 5. Aspectos da aprendizagem de estudantes.

Santos e Fonseca (2019), investigam as dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental na aprendizagem de operarem frações. Eles afirmam que essas estas decorrem de diferentes fatores como traumas, pensamentos de que a Matemática é algo complexo, “bicho de sete cabeças”, sendo impossível de se entender até as questões metodológicas de ensino do próprio professor. E que tais dificuldades de aprendizagem se referem ao desenvolvimento cognitivo do aluno, a construção e as noções básicas da matemática, aos princípios numéricos, aos entraves na resolução e na compreensão dos problemas, na falta de conhecimento dos conceitos principais, na prática metodológica não facilitadora à aprendizagem do conteúdo além da própria aversão a disciplina de matemática.

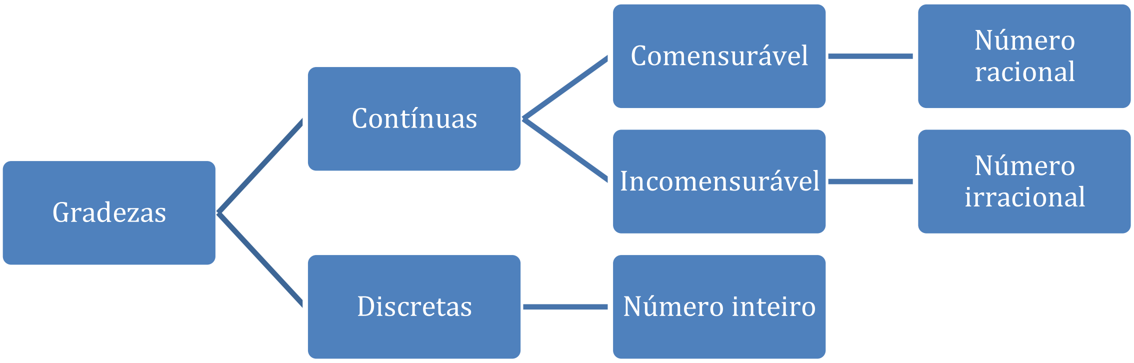
Uma vez que há a necessidade de empreender esforços em novas investigações e em desenvolver atividades formativas baseadas em situações de prática, bem como, analisar seu alcance na construção de conhecimentos profissionais na formação inicial e continuada (MURIEL JUNIOR; WIELEWSKI E CARRILL., 2019), e que a origem do conhecimento matemático fração está no problema de medida e na busca de uma notação para representar esta medida (SANTOS E FONSECA 2019), o objetivo deste estudo foi dá um sentido intuitivo a divisão de frações, tomando como unidade uma fração fixada.

MATERIAL E MÉTODOS

Ao consideremos um número real, este número real é a comparação de uma grandeza com a unidade, que é uma grandeza da mesma espécie, fixada como padrão. Quando utilizamos um número fracionário, estamos considerando que este número não representa um múltiplo da unidade utilizada. Esta, depende da grandeza utilizada a qual o número representa (FREGE, 2021).

Podemos classificar as grandezas em a) discretas, onde ao se compará-la com a unidade descreve-se uma contagem e o resultado é um número inteiro; e b) continuas, que podem ser reclassificadas em dois tipos: i) comensurável com a unidade escolhida, obtendo-se uma medida que é um número racional; e ii) incomensurável, onde a sua medida é um número irracional. Na figura 1 temos um esquema sintetiza essas informações (BOALER, 2018).

Figura 1 - Classificar as grandezas numéricas



Fonte: Os autores

Visto que para compreendermos a divisão de uma fração por outra, estamos focados unicamente na enumerabilidade dos números racionais, vamos abordar apenas as medidas comensuráveis.

Medida de áreas

Vamos expor algumas definições aplicadas a áreas (LIMA, 2009):

(i) Um quadrado cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

(ii) Um quadrado Q cujo lado tem medida um número natural não-nulo n pode ser decomposto, em n^2 quadrados justapostos.

Aplicando estas definições a um quadrado Q, que tenha por lado um número fracionário $\frac{m}{n}$, então podemos decompor Q em m segmentos cujo comprimento é $\frac{1}{n}$, ou seja, a área de cada retângulo será $\frac{1}{n^2}$. Daí, a área do quadrado (A_Q), é:

$$A_Q = \left[m \cdot \frac{1}{n}\right]^2 = m^2 \cdot \frac{1}{n^2} . = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \qquad (1)$$

A metodologia proposta consiste em transformar a unidade representativa da grandeza, alternando-a do elemento neutro multiplicativo do grupo dos reais (número 1), para uma área que é numericamente igual a fração de numerador um e que tem como divisor o produto dos divisores das frações envolvidas no cálculo.

Como a unidade deixa de ser fixa e para a ser variável, os números envolvidos deixam de ser frações e passam a ser números inteiros. A saber, um quadrado de lado 1, dividindo um lado em m comprimentos de medida $\frac{1}{m}$; analogamente, o outro lado em n partes iguais a $\frac{1}{n}$. Daí, formamos mn retângulos de área $\frac{1}{mn}$.

Para uma generalização, temos:

Afirmação: Suponhamos que $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sejam áreas, tais que: $\frac{a}{b}$ é p vezes a áreas comum $\frac{1}{k}$ e de forma análoga $\frac{c}{d}$ é q vezes $\frac{1}{k}$, então, tem-se:

$$A_Q\left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}\right) = \frac{A_Q\left(\frac{a}{b}\right)}{A_Q\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{p.\left(\frac{1}{k}\right)}{q.\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{p}{q} \tag{2}$$

Prova:

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{k} \Rightarrow p \cdot b = a \cdot k \tag{3}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{q}{k} \Rightarrow c \cdot k = q \cdot d \tag{4}$$

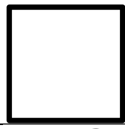
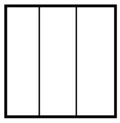
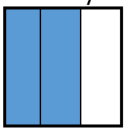
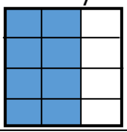
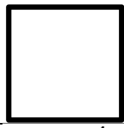
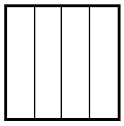
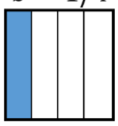
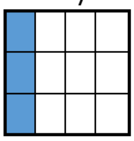
Assim, de (3) e (4), temos que:

$$p \cdot b \cdot c \cdot k = a \cdot k \cdot q \cdot d \Rightarrow \left(\frac{ad}{bc}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \tag{5}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

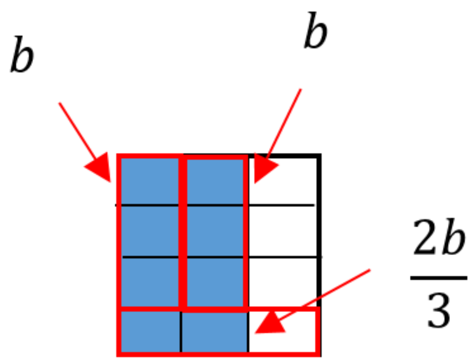
A partir da metodologia apresentada, chegamos a um Algoritmo Intuitivo Geométrico (AIG), para a execução da divisão de dois números fracionários $a = \frac{p}{k}$ e $b = \frac{q}{k}$, que está apresentado na tabela 1.

Tabela 1 – Algoritmo intuitivo geométrico da divisão de dois números fracionários $a = \frac{p}{n}$ e $b = \frac{q}{m}$ e exemplo.

Passos	Processo	Exemplo*
1º	Constrói-se um quadrado de área 1	
2º	Divide-se um de seus lados pelo quociente de a (n), utilizando retas perpendiculares	$n = 3$ 
3º	Representa-se geometricamente o número a	$a = 2/3$ 
4º	Divide-se um de seus lados, que seja perpendicular ao lado utilizado anteriormente, pelo quociente de b (m), utilizando retas perpendiculares	$a = 8/12$  $m = 4$
5º	Reescreve-se o número a como múltiplo da nova unidade representativo $\left(\frac{1}{mn}\right)$	$a = \frac{8}{12} = 8 \cdot \frac{1}{12}$
6º	Constrói-se um quadrado de área 1	
7º	Divide-se um de seus lados pelo quociente de b (m), utilizando retas perpendiculares	$m = 4$ 
8º	Representa-se geometricamente o número b	$b = 1/4$ 
9º	Divide-se um de seus lados, que seja perpendicular ao lado utilizado anteriormente, pelo quociente de a (n), utilizando retas perpendiculares	$b = 3/12$  $n = 3$
10º	Reescreve-se o número b como múltiplo da nova unidade representativo $\left(\frac{1}{mn}\right)$	$b = \frac{3}{12} = 3 \cdot \frac{1}{12}$
11º	Efetua-se a divisão cancelando o termo comum presente no numerado e denominador $\left(\frac{1}{mn}\right)$	$\frac{a}{b} = \frac{8 \cdot \frac{1}{12}}{3 \cdot \frac{1}{12}} = \frac{8}{3}$

* Para $a = 2/3$ e $b = 1/4$

Facilmente verifica-se que na área ocupada pelo número a, cabe-se $8/3$ (o mesmo que duas vezes mais dois terços) vezes a área ocupada por b. Ilustrativamente, temos:



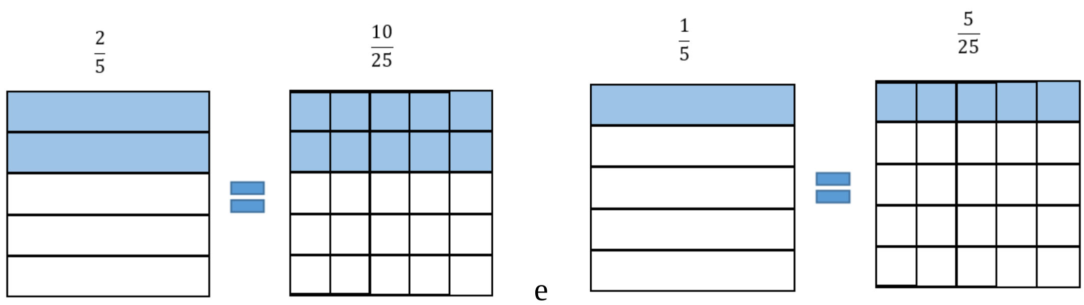
Ainda como resultados, vamos apresentar alguns exemplos ilustrativos com aplicações elementares, no primeiro exemplo temos $a > b$, com a e $b < 1$:, no segundo $a < b$, com a e $b < 1$ e por último $a > b$, com $a > 1$ e $b < 1$.

1) Vamos dividir dois números fracionários, digamos, $a = \frac{2}{5}$ e $b = \frac{1}{5}$, utilizando a forma memorizada clássica, ou seja, "*Para dividirmos duas frações basta multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda fração*".

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{1} = 2$$

Embora o processo de memorização e aplicação do algoritmo seja bastante simples, não apresenta aos alunos um significado lógico da operação.

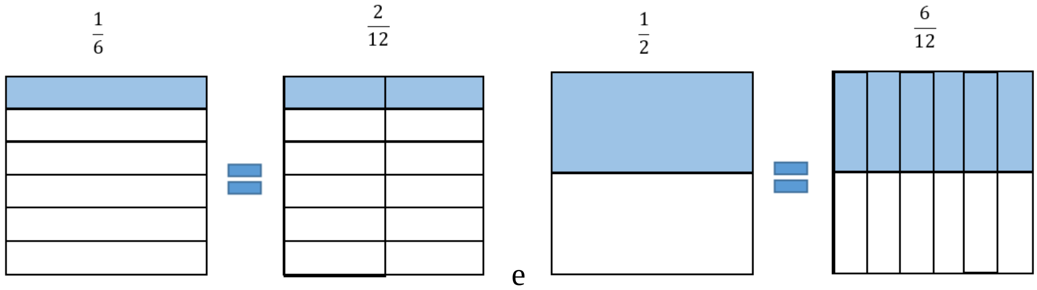
Já se fizermos uso do Algoritmo Intuitivo Geométrico, teremos:



$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{10}{25}}{\frac{5}{25}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{25}}{5 \cdot \frac{1}{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

Onde a unidade passou a ser $\frac{1}{25}$ avos, os números a e b possuem áreas de 10 e 5 desses unidades, respectivamente. Geometricamente pode-se constatar facilmente que na área delimitada pelo número a cabem exatamente duas vezes a área delimitada pelo número b.

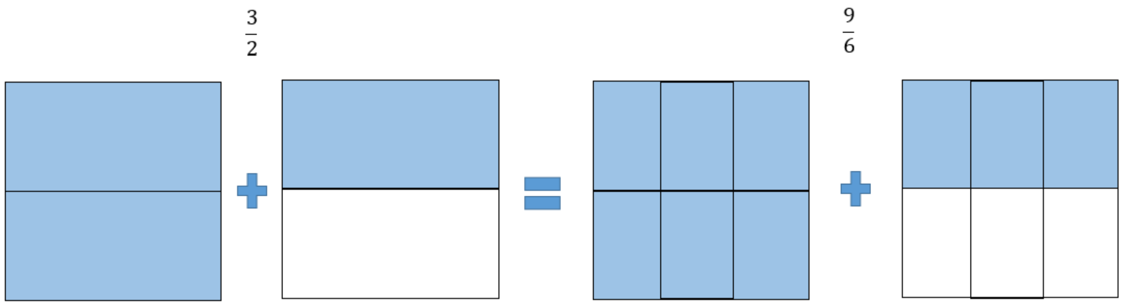
2) Quanto vale $\frac{1}{6}$ dividido por $\frac{1}{2}$?

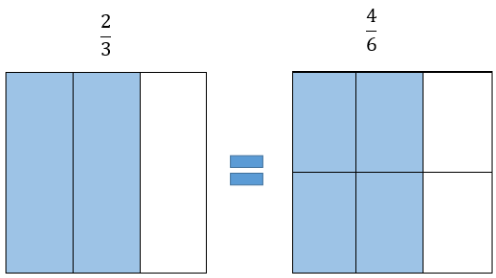


$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{12}}{6 \cdot \frac{1}{12}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

A unidade passou a ser $\frac{1}{12}$ avos, os números a e b possuem áreas de dois e seis dessas unidades, respectivamente. Geometricamente pode-se constatar facilmente que na área delimitada pelo número $a = \frac{1}{6}$ cabem exatamente um terço da área delimitada pelo número $b = \frac{1}{2}$.

3) $a = 3/2$ e $b = 2/3$





$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{9}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{9 \cdot \frac{1}{6}}{4 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{9}{4}$$

A unidade passou a ser $\frac{1}{6}$, os números a e b possuem áreas de nove e quatro dessas unidades, respectivamente. Geometricamente pode-se constatar facilmente que na área delimitada pelo número $a = \frac{3}{2}$ cabem exatamente duas vezes e um quarto da área delimitada pelo número $b = \frac{2}{3}$.

CONCLUSÕES

A operação de divisão de frações é realizada pela maioria dos alunos do ensino fundamental de forma mecânica, onde não há a compreensão nos processos envolvidos. Neste texto, foi apresentado uma forma intuitiva envolvendo áreas de figuras geométricas para tal operação. O algoritmo apresentado faz uma mudança na unidade fundamental, utilizando cálculos de fácil operação e demonstra geometricamente a sua representatividade.

Tal algoritmo pode ser utilizado em salas de aulas, para que os alunos possam entender os conceitos e as operações envolvidas na divisão de frações.

DECLARAÇÃO DE INTERESSE

"Os autores declaram não haver conflitos de interesse".

REFERÊNCIAS

BOALER, J. O. **Mentalidade matemática**. 1ªed. Porto Alegre: Instituto Sidarta, 2018.

FREGE, J.G. **Os fundamentos da aritmética – uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número**. 1ª ed. São Paulo: Livraria da física, 2021.

ISIKSAL M.; CAKIROGLU E. Pre-service teachers' representations of division of fractions. In: Pantazi D P, Philippou G (Ed.). Proceedings of the Fifth Congress of the EuropeanSociety for Research in Mathematics Education. Cyprus **Anais[…]** : European Research in MathematicsEducation, 2007, p. 1916-1924.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. **Adding it up: Helping children learn mathematics.** Washington: National Academies Press, 2001.

KRIBS-ZALETA, C. Invented strategies for division of fractions. In: Alatorre, S. et al (Ed.). Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais[…]** Meridia: Universidad Pedagógica Nacional.2006, 2:371-376.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria – Comprimento, área, volume e semelhança**. 1ª ed., São Paulo: Sociededa Brasileira de Matemática. 2009.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n.31, p.1-22, 2008.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M.S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, v. 11, n. 28, p.50-62, 2005.

MURIEL JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D.; CARRILLO, J. Meta-análise sobre Conhecimento para Ensinar Divisão de Frações. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), v.33, n.65, p.988-1026, 2019. DOI: 10.1590/1980-4415v33n65a02

SANTOS, R. S. D.; SANTOS, M. C.D.; CAMPOS, T. M. M. Estratégias utilizadas pelos alunos da educação básica na resolução de questões sobre números racionais na prova do saepe/sistema de avaliação educacional de Pernambuco. In: encontro nacional de educação matemática - ENEM, Curitiba. **Anais [...]** Curitiba, 2013. p. 1-15.

SANTOS, R.; FONSECA, S. S. Dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em Aprender Fração. **Revista insignare Scientia**, v.2, p.50-66, 2019.

Recebido em: 23/12/2022

Aprovado em: 15/01/2023

Publicado em: 19/01/2023