Conjecturas

DOI: 10.53660/CONJ-322-510

Os catetos do Triangulo Retângulo na Função Quadrática: Retas paralelas, áreas do trapézio e aplicações

The legs of the Triangle Rectangle and Quadratic Function: Parallel lines, trapezium areas and applications

Nilda Pantoja Gonçalves[1], Sebastião Martins Siqueira Codeiro[1], Márcio José Silva[2], Antonio Maia de Jesus Chaves Neto[1]. José Maria dos Santos Lobato Junior[3], José Francisco da Silva Costa[1*]

RESUMO

Esse artigo consiste obter um importante teorema a partir do triângulo retângulo, provando que dado à altura h e os catetos b e c de um triângulo retângulo, pode-se expressar uma função quadrática em que o discriminante é sempre um quadrado perfeito em função das represntações dos lados desse triângulo. As expressões das retas associadas à função quadrática serão dadas em relação aos lados do triângulo $h(x) = \frac{2x-2b^2}{c^2-b^2}$ e $g(x) = \frac{2x-2c^2}{c^2-b^2}$ as quais interceptam a função quadrática, obtida através do teorema de Pitágoras e de relações métricas, nas suas raízes. Com a aplicação da área do triangulo e da expressão do determinante, mostra-se que a área do trapézio obedece a seguinte expressão, $A = 2(c^2 - b^2)$, onde c e b representam os catetos do triângulo. A partir destes resultados algébricos, busca-se obter uma função quadrática em que o discriminante é sempre um quadrado perfeito em função dos catetos do triangulo. Com a aplicação da área do triangulo e da expressão do determinante, mostra-se que a área do trapézio ABCD, representada como pontos de intersecção das retas paralelas com a parábola, obedece a uma expressão dada pelos catetos do triângulo. O formalism descrito ao longo desse artigo, traz Como resultado uma nova metodologia de calcular problemas matemáticos considerando o desenvolvimento apresentado ao logo dessa temática.

Palavras-chaves: triângulo retângulo; catetos; àreas; Função quadrática.

ABSTRACT

This article consists in obtaining an important theorem from the right triangle, proving that given the height h and the sides b and c of a right triangle, it is possible to express a quadratic function in which the discriminant is always a perfect square in function of the representations of the sides of this triangle. triangle. The expressions of the lines associated with the quadratic function will be given in relation to the sides of the triangle h(x)=(2x-2b²)/(c²-b²) and g(x)=(2x-2c²)/(c²-b²) which intercept the quadratic function, obtained through the Pythagorean theorem and metric relations, at its roots. With the application of the triangle area and the determinant expression, it is shown that the trapezium area obeys the following expression, A=2(c^2-b^2), where c and b represent the legs of the triangle. From these algebraic results, we seek to obtain a quadratic function in which the discriminant is always a perfect square as a function of the edges of the triangle. With the application of the area of the triangle and the expression of the determinant, it is shown that the area of the ABCD trapezoid, represented as points of intersection of the parallel lines with the parabola, obeys an expression given by the legs of the triangle. The formalism described throughout this article brings as a result a new methodology for calculating mathematical problems considering the development presented along this theme.

Keywords: right triangle; collared peccaries; areas; Quadratic function.

.

Introdução

A relação entre a função quadrática (MURAKAMI, 2004) e os lados de um triângulo retângulo se fará considerando o teorema de Pitágoras e relações métricas a partir dos quais será obtida uma função quadrática cujos coeficientes são dados em função da altura h e da hipotenusa a do triangulo e o determinante é sempre um quadrado perfeito em função dos catetos. As expressões das retas associadas à função quadrática serão dadas em relação aos lados do triângulo $h(x) = \frac{2x-2b^2}{c^2-b^2}$ e $g(x) = \frac{2x-2c^2}{c^2-b^2}$ as quais interceptam a função quadrática nas suas raízes. Com a aplicação da área do triangulo e da expressão do discriminante, mostra-se que a área do trapézio ABCD, formado pelos pontos de intersecção das retas paralelas com a parábola, obedece a seguinte expressão $A = 2(c^2 - b^2)$, que são os parâmetros do triangulo.A expressão dos lados do triangulo retângulo (DOLCE,2005) em termos de uma função quadrática surgiu a partir de resultados anteriores, notou-se que os discriminantes das equações quadráticas geradas em busca dos pontos de intersecções das retas com a parábola, isto é as Eqs. 9 e 10, eram sempre quadrados perfeitos o que levou a uma possível relação com o teorema de Pitágoras (IMENES,2002), (MOL, 2013).

Atrelando ao teorema de Pitágoras resultados da geometria plana e um pouco de álgebra obteve-se a expressão da função quadrática em termos dos parâmetros do triangulo e então foi possível aplicar os resultados da nova abordagem da função quadrática o que resultou na relação dos lados do triangulo retângulo em termos de uma função quadrática. Ao decorrer dos capítulos serão apresentadas várias aplicações a fim de contextualizar o conteúdo estudado e viabilizar a aplicação destes a resolução de problemas, por vezes, já conhecidos, porém solucionados de maneira diferente do que propõe esta teoria.

Por fim, ressaltam-se a importância dos conteúdos relacionados com a presente temática como pré-requisitos para a consolidação dos resultados deste trabalho, assim como a importância do instrumento da pesquisa como viabilizadora do desenvolvimento do conhecimento matemático, mesmo em campos por vezes considerados saturados em pesquisa, tendo em vista o profundo e vasto campo da matemática como instrumento de pesquisa (IEZZI, 2010).

A investigação de conceitos matemáticos envolvendo o estudo da função quadrática atrelada as geometrias Plana e Analítica possibilitaram descobrimento de inúmeros resultados importantes que elevam este trabalho a um patamar de inovação, ainda aberto a investigação cientifica, e refletor do conhecimento matemático como resultante da árdua investigação cientifica.

2. A Relevância do pensamento algébrico como ferramenta potencial no rigor demonstrativa de fórmulas

Conforme os estudos de Almeida e Santos (2017, p. 35), um dos motivos para não termos ainda uma definição exata sobre o que vem a ser o pensamento algébrico deve-se a grande quantidade de objetos, como por exemplo, leis de formação algébricas, inúmeros tipos de representações de funções, bem como de processos de inversão e simplificação algébricos, dentre outros, ou seja, para esses autores o pensamentos algébrico está intrinsecamente "relacionado" com as estruturas e com a utilização de diversas representações vinculadas com situações quantificáveis de modo que haja uma relação entre elas, ou, "ações acerca de situações quantitativas, ou não, percebendo a generalização as relações entre as informações contidas nessas situações, [...], ou pode ser revelado por diferentes linguagens", como por exemplo, a linguagem de gestos, a natural, a pictórica e a linguagem dos símbolos

Ou seja, o pensar algébrico é uma forma de dar maior sentido e significado aos símbolos e objetos algébricos, no caso desse estudo, focamos para o significado do ato de demonstrar que de acordo com Canavarro (2007, p.106), este vem contribuir "para o sucesso do desenvolvimento do pensamento algébrico no contexto da exploração de padrões" o que justifica a importância do demonstrar algebricamente, principalmente, no que tange a importância do significado da linguagem simbólica e algébrica.

Para Cyrino e Oliveira (2011, p.101), o pensar algebricamente, "é um modo, entre outros, de produzir significado para a álgebra", especialmente, nesse caso, quando tratamos do rigor e da importância que tem de modo significativo, o uso de demonstrações de fórmulas ou estruturas algébricas conferindo-lhe maior significado e sentido o que ajudara aos alunos terem sua capacidade em resolver problemas ampliada.

Nessa vertente, decidimos por meio desse trabalho mostrar através do uso da demonstração sobre como escrever os lados de um triangulo usando uma função quadrática. .

2.1 As representações dos lados de um triangulo retângulo expressos em termos de uma função quadrática

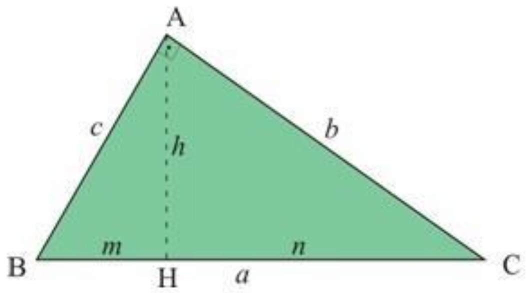
Geralmente, como se presencia nos livros didáticos, segundo Ventura e Almouloud (2013), a maioria das atividades e conteúdo de geometria analítica são voltadas para preparar o aluno para provas de vestibulares; Além disso, não há um detalhamento de problemas que motivem "a "criação da Geometria Analítica ou similar o problema histórico", (p.2), e, que a maioria das atividades são do tipo, localizar pontos no plano cartesiano; verificar a posição entre duas retas ou quais pontos passam por uma reta, dentre outros, conforme versam esses autores. Ou seja, é muito raro nos livros didáticos de Geometria Analítica, ênfase profunda a demonstração de cálculos analíticos e/ou atividades que induzam o aluno a pensar analiticamente, no que tange ao rigor do desvelar demonstrativo de formulas o que torna justifica a importância desse estudo (CAROLI, A., 1978), (WINTERLE, 2000), (FRENSEL, 2011).

Partindo dessas considerações, decidimos apontar ao longo do texto como foi obtido um importante teorema a partir do triângulo retângulo, provando que dado à altura h e a área A de um triangulo retângulo, os catetos b e c podem ser determinados considerando uma função quadrática em que o discriminante é sempre um quadrado perfeito em função dos termos do triângulo. As expressões das retas associadas à função quadrática serão dadas em relação aos lados do triângulo $h(x) = \frac{2x-2b^2}{c^2-b^2}$ e $g(x) = \frac{2x-2c^2}{c^2-b^2}$ as quais interceptam a função quadrática, obtida através do teorema de Pitágoras e de relações métricas, nas suas raízes. Com a aplicação da área do triangulo e da expressão do determinante, mostra-se que a área do trapézio obedece a seguinte expressão, $A = 2(c^2 - b^2)$, que são os parâmetros do triângulo.

2.2 A função quadrática em termos dos lados de um triângulo retângulo.

Nesta sessão será obtida a equação da função quadrática *y* intrínseca ao triângulo retângulo ABC (Figura1).

Figura 1: Triângulo Retângulo ABC



Fonte: Acervo dos autores.

Para determinar tal equação, considere inicialmente o Teorema de Pitágoras expresso abaixo:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (1)$$

Em seguida, usa-se a relação métrica, dada por:

$$ha = bc \;\rightarrow \mathrm{c} = \frac{ha}{b}, \quad (2)$$

onde o produto dos catetos é igual ao produto da altura pela hipotenusa.

Logo, substituindo as Eqs. 2 na 1, tem-se:

$$b^4 - a^2b^2 + h^2a^2 = 0.$$

Considerando $b^2 = x$, obtém-se a seguinte equação:

$$y = x^2 - a^2x + h^2a^2. \quad (3)$$

A expresão (3) é uma função do 2º grau, assim calculando o Δ das raízes da função dada en (3) com os coeficientes dados por: $a = 1, b = -a^2 e\ c = h^2a^2$, ocorre que:

$$\Delta = a^4 - 4h^2a^2$$

$$\Delta = (b^2 + c^2)^2 - 4b^2c^2$$

$$\Delta = b^4 - 2b^2c^2 + c^4$$

Ou ainda,

$$\Delta = (b^2 - c^2)^2,$$

supondo, $b < c$, tem-se que:

$$\sqrt{\Delta} = c^2 - b^2 \tag{4}$$

onde b e c são catetos do triangulo ABC.

Portanto, a expressão dada por (3) representa uma função do segundo grau expressa em termos dos parâmetros do triangulo ABC, cuja raiz quadrada do discriminante (4) é expresso pela diferença dos quadrados dos lados do triângulo retângulo.

2.3 Retas paralelas entre si e que interceptam, graficamente, as raízes da parábola

Considere inicialmente uma função quadrática dada pela equação:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{5}$$

Em seguida, utilizaremos o seguinte artifício matemático:

$$y = e^w \tag{6}$$

Para a extração de uma notação proveniente dessa igualdade e capaz de apontar as retas associadas à parábola. Tal que:

$$ax^2 + bx + c = e^w.$$

Deste resultado segue uma função do 2° grau, dada pela equação:

$$ax^2 + bx + c_1 = 0$$

Isto é,

$$ax^2 + bx + (c - e^w) = 0 \tag{7}$$

Assim, calculando a distância (Δ_1) entre as raízes da equação7 , tal que $c_1 = c - e^w$, ocorre que:

$$\Delta_1 = b^2 - 4ac + 4ae^w,$$

ou ainda,

$$\Delta_1 = \Delta + 4ae^w \tag{8}$$

Aplicando um pouco de álgebra na expressão em (7), e em seguida, substituir o termo e^w por $ax^2 + bx + c$, vem que:

$$\Delta_1 = \Delta\left(1 + \frac{4ae^w}{\Delta}\right) = \Delta\left(1 + \frac{4a\left(ax^2+bx+c\right)}{\Delta}\right)$$

$$\Delta_1 = \Delta\left[1 + \left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)^2\right]$$

Assim, pode-se denominar a variável u = u(x) como:

$$u = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

De modo que o valor de u não é definido para $\Delta = 0$ (ou seja, para a parábola que tem apenas uma raiz). Contudo, elevando u ao quadrado, têm-se que:

$$u^2 = \frac{4a^2}{\Delta}x^2 + \frac{4ab}{\Delta}x + \frac{4ac}{\Delta}.$$

Assim, somando uma unidade em ambos os membros, temos que:

$$u^2 + 1 = \frac{4a^2x^2}{\Delta} + \frac{4ab}{\Delta}x^2 + \frac{4ac}{\Delta} + 1$$

$$u^2 + 1 = \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac + \Delta}{\Delta}$$

$$u^2 + 1 = \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac}{\Delta}$$

$$u^2 + 1 = \frac{4a^2x^2 + 4abx + b^2}{\Delta} = \frac{(2ax + b)^2}{\Delta}$$

$$\sqrt{u^2 + 1} = \pm\frac{(2ax + b)}{\sqrt{\Delta}} \qquad (9)$$

A expressão (9) mostra uma relevante relação entre u e os valores algébricos da função $ax^2 + bx + c$, tal que o denominado $\sqrt{\Delta}$, não admite o valor nulo. Contudo, considerando o sinal + para o segundo membro da expressão em (9), e escrevendo de duas formas diferentes, somando uma unidade na primeira, e subtraindo uma unidade na segunda, têm-se as duas equações mostradas abaixo:

$$g = \sqrt{1 + u^2} + 1 \qquad (9.a)$$

$$h = \sqrt{1 + u^2} - 1 \qquad (9.b)$$

As equações 9.*a* e 9.*b* representam, respectivamente, as duas retas paralelas $g = g(x)$ *e* $h = h(x)$. Cada uma dessas retas contém as raízes da função quadrática, pois ambas cortam o eixo das abcissas exatamente nas raízes de *y* (Figura 2). Outra forma de escrever as equações das retas *g* e *h* é da seguinte maneira:

a) A partir da expressão (9*a*) para a função *g:*

$$g = \sqrt{1 + x_1^2} + 1 = \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} + 1 = \frac{2ax + b + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}$$

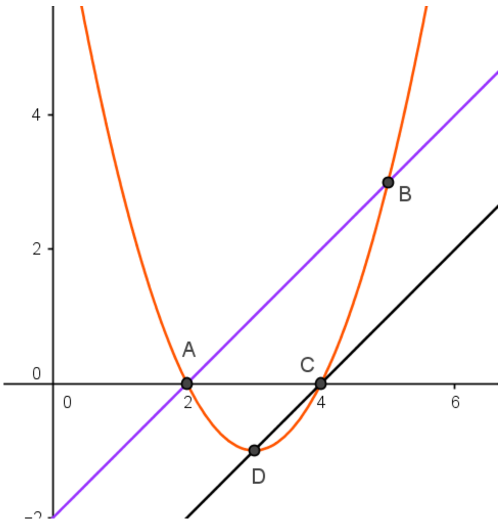
$$g = \frac{2ax + b + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \tag{10}$$

b) A partir da expressão $(9b)$, tem-se a segunda reta, h:

$$h = \sqrt{1 + u^2} - 1 = \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} - 1 = \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}$$

$$h = \frac{2a}{\sqrt{\Delta}}x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \tag{11}$$

Figura 2: Parábola y, retas paralelas g e h e pontos de intersecções A, B, C e D.



Fonte: Própria. Recurso Geogebra.

Portanto, as equações (10) e (11) representam duas retas que cruzam a parábola $y = ax^2 + bx + c$ exatamente nas suas raízes, tal que seus coeficientes angulares (m) são ambos iguais a $m = \frac{2a}{\sqrt{\Delta}}$, indicando que as retas são paralelas, enquanto seus coeficientes lineares são respectivamente $H_1 = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}$ e $H_2 = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}$.

Aplicação 1: Dada a função $y = x^2 - 4x - 5$. Calcule suas raízes.

Solução:

Sendo os coeficientes de *y:* $a = 1$, $b = -4$ e $c = -5$. Determina-se seu discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 16 - 4.1.(-5) = 16 + 20 \rightarrow \Delta = 36$$

Aplicando o valor de Δ nas equações 13.*a* e 13.*b*, obtém-se:

$$g = \frac{2ax + b + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2.1.x - 4 + \sqrt{36}}{\sqrt{36}} \rightarrow$$

$$g = \frac{2x - 4 + 6}{6} = \frac{x+1}{3}$$

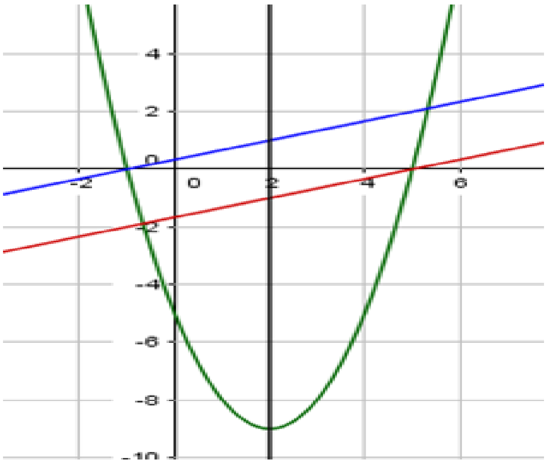
E em seguida,

$$h = \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2.1.x - 4 - \sqrt{36}}{\sqrt{36}}$$

$$h = \frac{2x - 4 - 6}{6} = \frac{x-5}{3}$$

Fazendo as ordenadas iguais a zero encontra-se o valor das raízes de *y* dadas pelas retas associadas ao gráfico de *y*.

$$x' = -1 \; e \; x'' = 5$$



Portanto, a representação da função y se constitui no plano cartesiano a uma parábola que possui, geometricamente, duas retas paralelas que interceptam suas raízes.

2.4 Expressões das retas paralelas à parábola y expressas a partir das representações dos lados do triangulo retângulo.

Uma vez obtidas as expressões (3) e (4) de acordo com as definições apresentadas as quais são dadas em função das representações dos lados e da altura do triangulo ABC, , procura-se determinar as expressões das retas paralelas que cruzam a parábola $y = x^2 - a^2x + h^2a^2$ exatamente nas suas raízes. Neste caso para determinar uma nova expressão para *g e h*, basta substituir nas expressões (10) e (11) os termos referentes a expressão (4), de forma que:

$$g = \frac{2ax+b+\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \rightarrow g = \frac{2x - 2b^2}{|\, b^2 - c^2 \,|} \tag{12}$$

De modo semelhante ao que foi feito anteriormente para a função g, procura-se determinar a expressão da reta h, dada por:

$$h = \frac{2ax+b - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \rightarrow h = \frac{2x - 2c^2}{|\, b^2 - c^2 \,|} \tag{13}$$

Portanto, as funções lineares (12) e (13) representam as duas retas paralelas que cruzam a parábola exatamente nas suas raízes.

2.5 Coordenadas dos pontos de intersecções entre as retas g e h com a parábola y.

Uma vez obtidas as retas g e h, dadas em função dos parâmetros do triangulo retângulo, iremos agora determinar todos os pontos de intersecção entre essas funções e a parábola y da expressão (3). Sejam as funções $g = \frac{2x - 2b^2}{|b^2 - c^2|}$, $h = \frac{2x - 2c^2}{|b^2 - c^2|}$ e $y = x^2 - a^2x + h^2a^2$ .Para determinar as intersecções, devem-se efetuar a igualdades $g = y$ e $h = y$, que indicam as equações quadráticas abaixo:

$$\sqrt{\Delta}\, x^2 - (a^2\sqrt{\Delta} + 2)x + h^2a^2\sqrt{\Delta} + 2b^2 = 0 \tag{14}$$

$$\sqrt{\Delta}x^2 - (a^2\sqrt{\Delta} + 2)x + h^2a^2\sqrt{\Delta} + 2c^2 = 0 \tag{15}$$

A expressão (15) é uma equação do 2º grau cujos coeficientes são: $a_g = \sqrt{\Delta}$, $b_g = -(a^2\sqrt{\Delta} + 2)$ e $c_g = h^2a^2\sqrt{\Delta} + 2b^2$. Sendo Δ_g, dada por:

$$\Delta_g = \left[-\left(a^2\sqrt{\Delta} + 2\right)\right]^2 - 4\sqrt{\Delta}\left[h^2a^2\sqrt{\Delta} + 2b^2\right]$$

$$\Delta_g = a^2\Delta + 4a^2\sqrt{\Delta} + 4 - 4h^2a^2\Delta - 4\sqrt{\Delta}(2b^2)$$

Note, porém, que escrevendo de duas formas diferentes as expressões $\sqrt{\Delta} = c^2 - b^2$ e $a^2 = b^2 + c^2$, somando os termos na primeira e subtraindo na segunda, têm-se as duas equações mostradas a baixo:

$$2c^2 = a^2 + \sqrt{\Delta} \tag{16}$$

$$2b^2 = a^2 - \sqrt{\Delta} \tag{17}$$

Portanto, usando da segunda igualdade, tem-se que:

$$\Delta_g = a^2\Delta + 4a^2\sqrt{\Delta} + 4 - 4h^2a^2\Delta - 4\sqrt{\Delta}(a^2 - \sqrt{\Delta})$$

$$\Delta_g = a^2\Delta + 4a^2\sqrt{\Delta} + 4 - 4h^2a^2\Delta - 4a^2\sqrt{\Delta} + 4\Delta$$

$$\Delta_g = a^2\Delta + 4 - 4h^2a^2\Delta + 4\Delta$$

Ou ainda,

$$\Delta_g = a^4\Delta + 4 - 4b^2c^2\Delta + 4\Delta$$

$$\Delta_g = a^4\Delta + 4 - (2b^2)(2c^2)\Delta + 4\Delta$$

$$\Delta_g = a^4\Delta + 4 - (a^2 - \sqrt{\Delta})(a^2+\sqrt{\Delta})\Delta + 4\Delta$$

$$\Delta_g = a^4\Delta + 4 - a^4\Delta + \Delta^2 + 4\Delta$$

$$\Delta_g = 4 + \Delta^2 + 4\Delta$$

$$\Delta_g = (2 + \Delta)^2$$

Portanto, as raízes da parábola são dadas por:

$$x_g = \frac{-b_g \pm \sqrt{\Delta_g}}{2.a_g},$$

$$x'_g = c^2 + \frac{2}{\sqrt{\Delta}}$$

$$x''_g = b^2 \quad (18)$$

Note que x''_g é a raiz da função parabólica y dada pela expressão (3), e representa o quadrado do menor cateto do triângulo ABC. Assim, note que da reta *g* se extrai o menor cateto do triângulo retângulo. Procedendo de modo análogo para o cálculo de Δ_h da expressão dada por (15), obtém-se a seguinte expressão para o discriminante desta equação:

$$\Delta_h = (\Delta - 2)^2$$

E suas raízes determinam as abcissas dos pontos de intersecção entre essas funções.

$$x'_h = c^2 \quad (19)$$

$$x''_h = b^2 + \frac{2}{\sqrt{\Delta}}$$

Mais uma vez, observe que x'_h é a segunda raiz da função parabólica y da expressão (3), e representa o quadrado do maior cateto do triângulo ABC. Assim, note que da reta *h* se extrai o maior cateto do triângulo retângulo. A localização das ordenadas correspondentes às abcissas evidenciam os pontos de intercessão entre a parábola e as retas, respectivamente:

$$A(b^2, 0) \; e \; B\left(c^2 + \frac{2}{\sqrt{\Delta}}, \frac{2\Delta+4}{\Delta}\right)$$

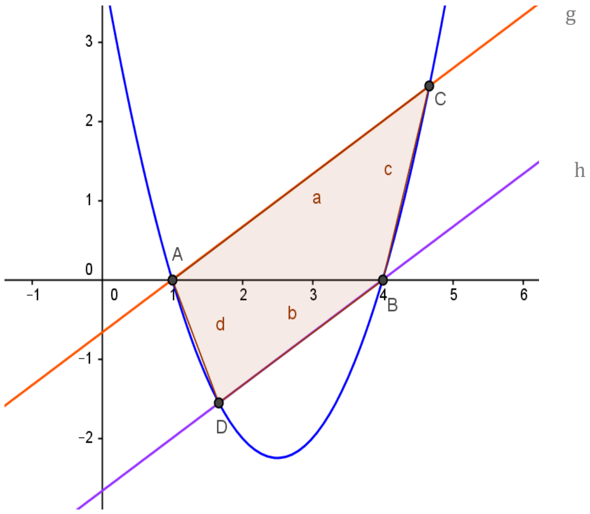
$$C(c^2, 0) \; e \; D\left(\mathrm{b}^2 \; + \frac{2}{\sqrt{\Delta}}, \frac{4 \; - 2\Delta}{\Delta}\right)$$

Conclui-se, portanto, que intersecção com *y* da expressão (3) com as retas g e h, expressam as raízes dos catetos do triangulo retângulo. Isto é, evidencia as relações das raízes da expressão dada por (3) com as representações dos catetos do triangulo.

2.6 Natureza do polígono ABCD

Na seção anterior, buscou-se determinar os pontos comuns entre as retas e a parábola. Nessa seção o objetivo consiste em saber qual é a natureza do quadrilátero formado pelos pontos de intersecção entre a parábola e as retas (Figura 3).

Figura 3: Quadrilátero formado pelos pontos A, B, C e D de intercessão entre a parábola e as retas *g* e *h*.



Fonte: Acervo dos autores.

Nos tópicos anteriores, observou-se que as coordenadas dos pontos são dadas por:

$$A\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \quad C\left(-\frac{b}{2a}+\frac{4a+\Delta}{2a\sqrt{\Delta}}, \frac{4a+2\Delta}{\Delta}\right)$$
$$B\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \quad D\left(-\frac{b}{2a}+\frac{4a-\Delta}{2a\sqrt{\Delta}}, \frac{4a-2\Delta}{\Delta}\right)$$

Utiliza-se a geometria analítica com intuito para determinar a distância entre os pontos. Para isto considere os pontos B e D, dados pelas coordenadas,

$$B\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},0\right)\ e\ D\left(-\frac{b}{2a}+\frac{4a-\Delta}{2a\sqrt{\Delta}},\frac{4a-2\Delta}{\Delta}\right)$$

A distância $\overrightarrow{DB}$ pela diferença entre os pontos é,

$$\overrightarrow{DB}=\left(-\frac{b}{2a}+\frac{4a-\Delta}{2a\sqrt{\Delta}}+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{4a-2\Delta}{\Delta}\right)$$

$$\overrightarrow{DB}=\left(\frac{4a-\Delta-\Delta}{2a\sqrt{\Delta}},\frac{4a-2\Delta}{\Delta}\right)=\left(\frac{4a-2\Delta}{2a\sqrt{\Delta}},\frac{4a-2\Delta}{\Delta}\right)$$

O módulo desse vetor será,

$$DB=\left[\left(\frac{4a-2\Delta}{2a\sqrt{\Delta}}\right)^2+\frac{(4a-2\Delta)^2}{\Delta^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$DB=\left[\frac{(4a-2\Delta)^2}{4a^2\Delta}+\frac{(4a-2\Delta)^2}{\Delta^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$DB=\left[(4a-2\Delta)^2\left(\frac{1}{4a^2\Delta}+\frac{1}{\Delta^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$DB=|4a-2\Delta|\left[\frac{\Delta^2+4a^2\Delta}{4a^2\Delta^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{DB}=|4a-2\Delta|\frac{(\Delta+4a^2)^{\frac{1}{2}}}{|2a\Delta|}$$

$$\overline{DB}=\frac{|2a-\Delta|}{|a\Delta|}\sqrt{\Delta+4a^2} \qquad (20)$$

Considere o segmento $\overline{AC}$ dados pelas coordenadas dos pontos, A e C,

$$A\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},0\right)\text{ e }C\left(-\frac{b}{2a}+\frac{4a+\Delta}{2a\sqrt{\Delta}},\frac{4a+2\Delta}{\Delta}\right)$$

Logo, diferença entre eles será,

$$\overline{AC}=\left(-\frac{b}{2a}+\frac{4a+\Delta}{2a\sqrt{\Delta}}+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{4a+2\Delta}{\Delta}\right)$$

$$\overline{AC} = \left(\frac{4a + \Delta + \Delta}{2a\sqrt{\Delta}}, \frac{4a + 2\Delta}{\Delta}\right)$$

$$\overline{AC} = \left(\frac{4a + 2\Delta}{2a\sqrt{\Delta}}, \frac{4a + 2\Delta}{\Delta}\right)$$

Novamente, o módulo do vetor será,

$$\overline{AC} = \left[\left(\frac{4a + 2\Delta}{2a\sqrt{\Delta}}\right)^2 + \frac{(4a + 2\Delta)^2}{\Delta^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{AC} = \left[(4a + 2\Delta)^2\left(\frac{1}{4a^2\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{AC} = |4a + 2\Delta|\left[\frac{(\Delta^2 + 4a^2\Delta)}{4a^2\Delta^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{AC} = |4a + 2\Delta|\left(\frac{\Delta + 4a^2}{4a^2\Delta^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{AC} = \frac{|4a + 2\Delta|}{|2a\Delta|}\sqrt{\Delta + 4a^2}$$

$$\overline{AC} = \frac{|2a+\Delta|}{|a\Delta|}\sqrt{\Delta + 4a^2} \qquad (21)$$

Analogamente, as distancias $\overline{AD}$ e $\overrightarrow{CB}$ são obtidas:

$$\overline{AD} = \frac{2}{|\Delta|}\sqrt{\Delta + (2a - \Delta)^2} \qquad (22)$$

e

$$\overline{CB} = \frac{2}{|\Delta|}\sqrt{\Delta + (2a + \Delta)^2} \qquad (23)$$

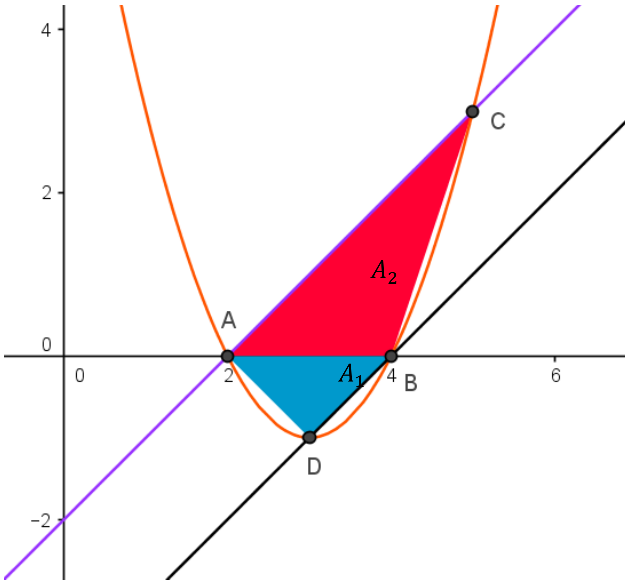
2.7 Calculo de Áreas

Para efetuar o estudo da natureza do polígono de vértice A, B, C e D, cujas distâncias entre seus pontos são dadas a cima, utiliza-se o recurso da geometria analítica por meio da área do triângulo em termos das coordenadas de seus vértices dada pela Eq. 18:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \end{vmatrix} \tag{24}$$

A expressão dada nos auxiliará na busca pelas áreas dos triângulos$\Delta\ (ABC)\ e\ \Delta\ (ABD)$, que compõe o polígono ABCD. E assim, encontrar a área final e definir o quadrilátero (Figura 4)), onde A_1 e A_2 correspondem às respectivas áreas dos triângulos (Figura 4).

Figura 4: Triângulos $\Delta\ (ABC)$ (em vermelho) e $\Delta\ (ABD)$ (em azul).



Fonte: Acervo dos autores.

Primeiramente, calcula-se a área do triângulo $\Delta\ (ABC)$:

$$A_1 = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & 0 & 1 \\ x_B & 0 & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}.(x_B - x_A)y_C$$

$$A_1 = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\Delta}}{a}.\left(\frac{4a + 2\Delta}{\Delta}\right) = \frac{2\sqrt{\Delta}}{\Delta} + \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{\Delta}\left(\frac{2}{\Delta} + \frac{1}{a}\right)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left|\frac{(2a+\Delta)}{\Delta}\right| \tag{25}$$

Analogamente, para $\Delta\ (ABD)$:

$$A_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & 0 & 1 \\ x_B & 0 & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}|y_D(x_B - x_A)|$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left|\frac{(2a-\Delta)}{\Delta}\right| \tag{26}$$

Por fim, através soma das áreas formadas pelos triângulos $\Delta\ (ABC)\ e\ \Delta\ (ABD)$, obtém-se a expressão final para a área do polígono ABCD, dada por:

$$A_f = \frac{\sqrt{\Delta}}{a\Delta}|(2a+\Delta) + \ (2a-\Delta)| \tag{27}$$

Utilizando outro método deve-se provar que de fato este quadrilátero corresponde a um trapézio. Para isto, utiliza-se da geometria plana a área do trapézio, que é dada por:

$$A = (b+B).\frac{H}{2} \tag{28}$$

Onde

$$b = d_{DB} = \frac{|2a-\Delta|}{|a\Delta|}\sqrt{\Delta + 4a^2}.$$

E

$$B = d_{AC} = \frac{|2a+\Delta|}{|a\Delta|}\sqrt{\Delta + 4a^2}$$

Como demonstrado anteriormente. Assim sendo, os pontos de intersecções A, B, C e D com y e as retas g e h podem representar um trapézio se o resultado levar a mesma expressão da área calculada anteriormente. Supondo que o polígono seja um trapézio, pela geometria plana, tem-se que,

$$A = (d_{DB} + d_{AC}).\frac{H}{2} \tag{29}$$

Para obter a altura do quadrilátero, utiliza-se o recurso da geometria analítica por meio da distância de um ponto a uma reta dada pela seguinte expressão algébrica,

$$H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \tag{30}$$

Nessa expressão, considera o H como a altura do polígono que representa a distância da reta paralela com dos pontos da segunda reta. Assim,

$$g = \frac{2ax + b + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \to H = \frac{\left|\sqrt{\Delta}y_1 - 2ax - b - \sqrt{\Delta}\right|}{\sqrt{\Delta + 4a^2}},$$

onde $a_1 = 2a$ e $b = \sqrt{\Delta}$

Logo,

$$H = \frac{2|\sqrt{\Delta}|}{\sqrt{\Delta + 4a^2}} \tag{31}$$

Aplicando este resultado na fórmula dada pela geometria plana, tem-se:

$$A = \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a\Delta}\right| [|2a - \Delta| + |2a + \Delta|] \tag{32}$$

Essa última expressão está em pleno acordo com o resultado anterior, mostrando a equivalência das áreas. Isso evidencia que os pontos de intersecções com a parábola e as retas paralelas, são vértices de um trapézio para toda parábola dada, desde que se considere $\Delta > 0\ e\ \Delta \neq 0$.

2.7.1 Desigualdades entre os parâmetros Δ e a

Podem-se considerar algumas outras particularidades entre os parâmetros e a área A (Equação 20). Se $\Delta > 2a$, tem − se:

$$|2a - \Delta| = \Delta - 2a$$

$$|2a + \Delta| = 2a + \Delta, \text{ com } \Delta > 0$$

Logo,

$$A \left|\frac{\sqrt{\Delta}}{a\Delta}\right| [\Delta - 2a + 2a + \Delta] \to A \left|\frac{2\Delta\sqrt{\Delta}}{a\Delta}\right|$$

$$A = \left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{a}\right| \tag{33}$$

Definindo, portanto, uma expressão reduzida da Eq. 20. Se Δ for um quadrado perfeito com $a = 1$, temos que a área do trapézio é obtida como o produto do dobro da raiz do determinante.

Aplicação 2

Dada a parábola $y = x^2 - 6x + 8$. Obtenha:

a) As retas g e h

b) As raízes e o vértice

c) As intersecções da função y com as retas g e h

d) A área do retângulo formado pelas retas g e h com as intersecções da reta V e com o eixo da ordenada.

Solução:

a) $y = x^2 - 6x + 8$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4$

$$g = \frac{2ax + b + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2.1.x - 6 + 2}{2} = \frac{2x - 4}{2} = x - 2$$

$$h = \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{2.1.x - 6 - 2}{2} = \frac{2x - 8}{2} = x - 4$$

b)

Raízes:

$$g = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x' = 2$$

$$h = 0 \rightarrow x - 4 = 0 \rightarrow x'' = 4$$

Vertice:

$$V_x = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{b}{2a} \rightarrow V_x = 3$$

c) $g = y$

$$-a\sqrt{\Delta}x^2 + \left(2a - b\sqrt{\Delta}\right)x + \sqrt{\Delta}(1 - c) + b = 0$$

$$-2x^2 + (2 + 12)x + 2(1 - 8) + (-6) = 0$$

$$-2x^2 + 14x - 14 - 6 = 0$$

$$-2x^2 + 14x - 20 = 0$$

$$-x^2 + 7x - 10 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$

Discriminante e raízes,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4.1.10 = 49 - 40 \rightarrow \Delta = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow x' = 5 \quad \text{e} \quad x'' = 2$$

Agora vejamos para $h = y$:

$$-a\sqrt{\Delta}x^2 + \left(2a - b\sqrt{\Delta}\right)x - \sqrt{\Delta}(1 + c) + b = 0$$

$$-2x^2 + 14x - 2(1 + 8) - 6 = 0$$

$$-2x^2 + 14x - 18 - 6 = 0 \rightarrow -2x^2 + 14x - 24 = 0$$

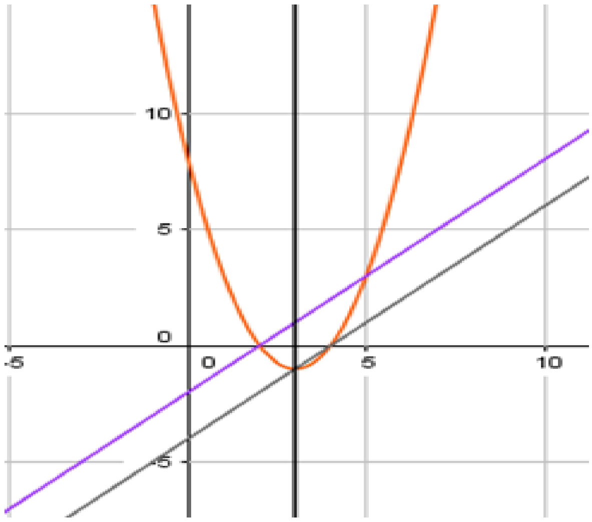
$$-x^2 + 7x - 12 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2.1} = \frac{7 \pm 1}{2} \rightarrow x' = 4 \quad \text{e} \quad x'' = 3$$

d)

$$A = \frac{b}{a\sqrt{\Delta}}\sqrt{\Delta + 4a^2} = -\frac{6}{1.2}\sqrt{4 + 4} = -3\sqrt{8} \rightarrow$$

$$A = 6\sqrt{2}.$$



Aplicação 3

Considere a equação quadrática $y = x^2 - 5x + 4$. Calcule a área do trapézio formados pelos pontos de intersecção entre as retas associadas à parábola e y. Para isto, utilize os dois métodos apresentados acima.

Solução:

Inicialmente devem-se encontrar as coordenadas dos pontos de intersecção entre as retas e a parábola. Para isto devemos encontrar as retas g e h.

$$g = \frac{2ax + b + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}, \Delta = 25 - 4.4 \rightarrow \Delta = 9$$

$$g = \frac{2x - 5 + 3}{3} \rightarrow g = \frac{2x - 2}{3}$$

$$h = \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \rightarrow h = \frac{2x - 8}{3}$$

Pontos de intersecção de y com g

$$\frac{2x-2}{3} = x^2 - 5x + 4 \rightarrow 2x - 2 = 3x^2 - 15x + 12 \rightarrow 3x^2 - 17x + 14 = 0$$

$$\rightarrow \Delta_g = 289 - 12.14 \rightarrow \Delta_g = 289 - 168 \rightarrow \Delta_g = 121 \rightarrow \sqrt{\Delta_g} = 11$$

$$\rightarrow x = \frac{17 \pm 11}{2.3} \rightarrow x_1 = \frac{28}{6} \rightarrow x_1 = \frac{14}{3} \rightarrow x_2 = \frac{17 - 11}{6} = \frac{6}{6} \rightarrow x_2 = 1$$

Logo a coordenada A, será $A(1{,}0)$. Seja a reta g, logo,

$$g = \frac{2x - 2}{3} = \frac{1}{3}\left[2.\frac{14}{3} - 2\right] = \frac{28 - 6}{9} = \frac{22}{9}$$

Dessa maneira, tem-se que: $C\left(\frac{14}{3}, \frac{22}{9}\right)$. Pontos de intersecção de y com h, será:

$$x^2 - 5x + 4 = \frac{2x - 8}{3}$$

$$3x^2 - 15x + 12 + 18 - 2x = 0$$

$$3x^2 - 17x + 20 = 0$$

$$\Delta_h = 289 - 4.3.20 = 289 - 240 \rightarrow \Delta_h = 49$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{17 \pm 7}{6} \rightarrow x_3 = 4$$

$$x_4 = \frac{17 - 7}{6} \rightarrow x_4 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$B(4{,}0)$

$$h = \frac{2x - 8}{3} = \frac{1}{3}\left(2.\frac{5}{3} - 8\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{10 - 24}{3}\right) = -\frac{14}{9}$$

$$D\left(\frac{5}{3}, -\frac{14}{9}\right)$$

Agora calcula-se a área, utilizando o método da geometria analítica.

ΔABC

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{14}{9} & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{56}{9} + \frac{14}{9}\right)\right|$$

$$A_1 = \frac{1}{2}.\frac{42}{9} = \frac{42}{18} = \frac{21}{9} \rightarrow A_1 = \frac{7}{3}$$

ΔABD

$$A_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 1\\ \frac{14}{3} & \frac{22}{9} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|\frac{88}{9}-\frac{22}{9}\right|$$

$$A_2=\frac{1}{2}.\frac{66}{9}=\frac{33}{9}=\frac{11}{3}$$

$$A_f=\frac{11}{3}+\frac{7}{3}=\frac{18}{3}\rightarrow A_f=6ua$$

Aplicação 4

Considerando a mesma aplicação 3 e Utilizando o método demostrado. Pela expressão (32). Isto é,

$$A=\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta a}(2a+\Delta)\right|+\left|\frac{\sqrt{\Delta}}{\Delta a}(2a-\Delta)\right|$$

Para $\Delta = 9$ e $a=1$, obtem-se:

$$A=\left|\frac{3}{9.1}(2.1+9)\right|+\left|\frac{3}{9.1}(2.1-9)\right|$$

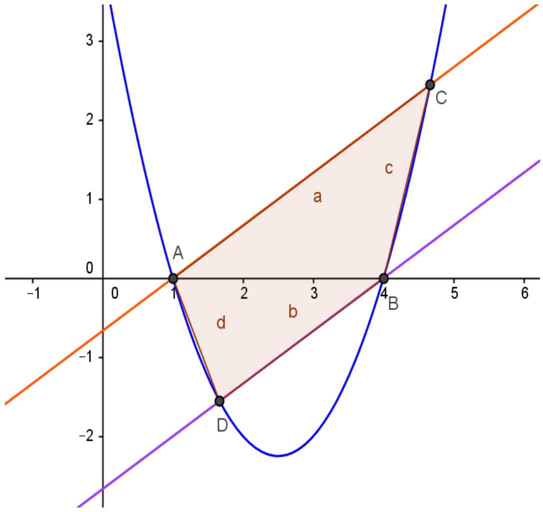
$$A=\frac{1}{3}.11+\left|\frac{1}{3}.(-7)\right|=\frac{11}{3}+\frac{7}{3}=\frac{18}{3}\rightarrow$$

$$A=6ua$$

O que está de pleno acordo com o método anterior.

Aplicação 5

Dado um triangulo de hipotenusa $a=25cm$ e uma parábolas onde duas retas paralelas g e h interceptam os pontos A, B, C e D, de modo a constituir um quadrilátero formado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, cuja área vale 1054 cm². Com base nessas considerações, obtenha o valor do menor cateto do triângulo.



Solução:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$625 = b^2 + c^2$$

Sendo a área do quadrilátero, dada por:

$$A_q = 2(c^2 - b^2)$$

$$1054 = 2(c^2 - b^2)$$

$$\frac{1054}{2} = c^2 - b^2$$

$$527 = c^2 - b^2$$

Obtemos um sistema:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 625 \\ c^2 - b^2 = 527 \end{cases}$$

Cuja solução, implica:

$$2b^2 = 98$$

$$b = 7cm$$

Portanto, o menor cateto tem valor 7cm.

Com a utilização das retas associadas à parábola, mostrou-se que o delta da função quadrática (Eq. 23) leva a uma raiz exata em termos da diferença dos quadrados entre o maior e menor cateto do triângulo. Com base nesse resultado, escreveram-se as retas paralelas a fim de calcular as duas raízes da função quadrática dada, que são justamente, o quadrado de cada cateto.

Tendo em vista esse importante resultado, com o auxilio da geometria analítica, calcularam-se as coordenadas dos pontos A, B, C e D de intersecção das retas com a parábola em que os segmentos que representam os lados de um trapézio, determinam um relevante resultado dado como área $A = 2(c^2 - b^2)$, mostrando que toda parábola em função de um dos lados de um triangulo retângulo, determina junto com as retas paralelas associadas a ela, um trapézio de área dado pelo dobro da diferença dos quadrados entre o cateto maior e menor do triangulo retângulo.

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho diversos resultados foram obtidos a partir do desenvolvimento de uma álgebra concentrada em torno do estudo da função quadrática sob as perspectivas das geometrias plana e analítica. Inicialmente se discorreu sobre o contexto histórico e formalismo matemático de alguns temas relacionados com a geometria, em especial a geometria analítica e função quadrática destacando o seu aspecto teórico e alguns de seus principais nomes.

Destacou-se o trabalho de diversos matemáticos e de suas obras no decorrer da historia da geometria, em destaque a Geometria analítica, e das equações quadráticas. Em seguida, desenvolveu-se um formalismo matemático em torno dos principais temas relacionados a estes assuntos, como pré-requisitos para o desenvolvimento deste estudo. Evidenciaram-se alguns conceitos básicos da geometria analítica como a distância entre pontos, distancia de um ponto a reta, estudo da equação da reta e o cálculo da área do triangulo pelas coordenadas de seus vértices.

Além de um estudo da função quadrática e seus elementos essenciais raízes, discriminante, vértice, eixo de simetria e sua representação no plano. Embasando, portanto, como pré-requisito o desenvolvimento dos resultados posteriores apresentados ao longo do texto.

De posse do conteúdo teórico inicial, importantes resultados foram desenvolvidos relacionados com a função quadrática em que se passa a considerar duas retas paralelas que interceptam uma parábola em suas raízes e em outros dois pontos de modo a formar um trapézio ABCD, com vértices nas intersecções, cuja área é dada em função dos parâmetros a e Δ função quadrática.

A veracidade da existência do trapézio foi comprovada utilizando-se como requisitos, importantes resultados das geometrias analítica e plana. Sendo todos os resultados originados de uma igualdade entre a função exponencial e a função quadrática utilizada a fim de se obterem as retas paralelas associadas a parábola e outros teoremas que foram discutidos ao longo do trabalho.

$u(x)\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}e^{\frac{w}{2}} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{ax^2+bx+c}$, com $e^{\frac{w}{2}} = \sqrt{ax^2+bx+c}$

Referências

ALMEIDA, Jadilson Ramos de; SANTOS, Marcelo Camera dos. **Pensamento Algebrico: Em busca de uma definição**. RPEM. Campo Mourao, pr, V. 6, n.10, p34-60, 2017.

CANAVARRO, Ana Paula. **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.** Revista Quadrante, Universidade de Évora e CIEFCUL. Vol. XVI, Nº 2, 2007.

CAROLI, A.; Callioli, C.A; Feitosa, M.O., ***Matrizes, Vetores e Geometria Analítica***, 9a. edição, Nobel, 1978, São Paulo. Simmons, G. F., Cálculo com Geometria Analítica, Volume 1, Makron Books do Brasil Editora, São Paulo.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; OLIVEIRA, Hélia **Margarida de. Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 97 a 126, abril 2011.

DOLCE, Osvaldo. POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar v. 9: Geometria Plana**. São Paulo, 2005.

FRENSEL, Katia. DELGADO, Jorge. **Geometria Analítica.** São Luiz: NEAD-UFMA, 2011.

IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações**, 2: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.

IMENES, L. M. e LELLIS, M. **Matemática para todos**. 8ª série. São Paulo: Scipione, 2002.

MOL, Rogério Santos. **Introdução á História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MURAKAMI, Carlos, IEZZI, Gelson. **"Fundamentos da Matemática Elementar** - Volume 1". 8ª Edição. São Paulo: Atual, 2004. ISBN 85-357-0455-8

VENTURA, karen Tibursky Alves; ALMOULOUD, Saddo Ag . **Análise dos conteúdos de geometria analítica em livros didáticos de ensino médio**. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. RS. Canoas. UBRA, 2013.

WINTERLE, P.,***Vetores e Geometria Analítica***, Makron Books do Brasil Editora, 2000, São Paulo.

Recebido em: 01/10/2021

Aprovado em: 05/11/2021

Publicado em: 15/11/2021