Aprendizagem Significativa do Princípio de Inclusão-Exclusão

Meaningful Learning of the Principle of Inclusion and Exclusion

Maria Aparecida da Silva Rufino^{1*}, José Roberto da Silva¹, Edmara Patrícia Américo Ferreira²

RESUMO

Alguns conteúdos dos livros textos de matemática podem ser considerados como criações didáticas que quando ensinados sem uma ponte adequada com o saber matemático, figuram como objetos de ensino em si mesmos. No caso do Princípio de Inclusão-Exclusão (PIE), geralmente se valoriza mais o uso do diagrama de Venn do que o raciocínio de contagem, desvinculando-o da Combinatória, seu campo de origem. Respalado no marco ausubeliano de aprendizagem, investigam-se as compreensões e as metodologias de cinco professores, considerando as relações e filiações conceituais do PIE, enquanto generalização do Princípio Aditivo, no contexto da combinatória. Trata-se de um estudo de caso qualitativo e, após análise de um questionário aplicado, observou-se que eles além de não reconhecerem o PIE como uma técnica de contagem, não possuem um sistema de informação adequado sobre o tema e consequentemente não propõem metodológicas que favoreçam a aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Princípio de inclusão e exclusão; Sistema de informação; Aprendizagem significativa.

ABSTRACT

Some contents of mathematical textbooks can be considered as didactic creations that, when taught without a proper bridge to mathematical knowledge, figure as objects of teaching in themselves. In the case of the Principle of Inclusion and Exclusion (PIE), the use of Venn's diagram is often more valued than the reasoning of counting, separating it from the Combinator, its origin field. Supported by the Ausubelian learning framework, the understandings and methodologies of five teachers are investigated, considering the relations and conceptual affiliations of the PIE, as a generalization of the Additive Principle, in the context of combinatorics. It is a qualitative case study and, after analyzing an applied questionnaire, it was observed that, in addition to not recognizing the PIE as a counting technique, they do not have an adequate information system on the subject and consequently do not propose methodologies that foster meaningful learning.

Keywords: Principle of inclusion and exclusion; Information system; Meaningful learning.

¹ Universidade de Pernambuco – UPE, *campus* Mata Norte/ Programa de Pós-Graduação (*Stricto Sensu*) em Educação da UPE.

*E-mail: aparecida.rufino@upe.br; jroberto.silva@upe.br

² Professora do Serviço Social da Indústria, SESI/ edmara_paty@hotmail.com

INTRODUÇÃO

Alguns conteúdos que compõem os Livros Didáticos (LDs) de matemática, na perspectiva defendida por Chevallard (1991), são verdadeiras criações didáticas que são incorporadas aos programas para facilitar a aprendizagem. Mas, quando ensinados sem um contexto significativo figuram apenas como objeto de ensino em si mesmos, sem necessariamente ter vínculos com aplicações compreensíveis para o estudante, cabendo ao professor fazer a ponte com o saber matemático.

O Princípio de Inclusão-Exclusão (PIE), por exemplo, é abordado nos LDs de matemática do 1º ano do Ensino Médio, numa breve alusão ao tema, priorizando-se mais a aplicação do diagrama de Venn, sem explorar adequadamente o raciocínio de contagem a ele subjacente, o que o desvincula da Combinatória, seu campo de origem.

Ademais, por ser uma criação didática, possui validade restrita e sua aplicação nos problemas sobre o PIE fica limitada a situações que não exceda a um número de quatro conjuntos envolvidos na contagem, tornando-se geometricamente impraticável sua utilização. Portanto, é preciso sempre estar atento à eficiência de uma interpretação pedagógica.

Diante desses argumentos, cabe questionarmos se os professores ensinam o PIE apropriadamente, utilizando seu sistema de informação conceitual de maneira a possibilitar uma aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2002) dos alunos ou, se a exemplo dos LDs, priorizam muito mais a aplicação do diagrama de Venn e seu uso mecânico, sem explorar o raciocínio combinatório subjacente a esse princípio?

Coerentemente com os propósitos investigativos do estudo, optou-se por apresentar o PIE através de um sistema de informação conceitual, em consonância com os aspectos teóricos da aprendizagem significativa ausubeliana e, a partir da aplicação de um questionário diagnóstico aplicado a um grupo de cinco professores, busca-se conhecer as concepções, estratégias resolutivas e dificuldades para abordar esse tema.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1- A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS)

A TAS supõe que as pessoas pensam e vivem num mundo de conceitos ao invés de objetos, acontecimentos e situações. Daí a importância dos conhecimentos prévios,

definidos por Ausubel (2002) como *conceitos subsunçores*, para a aprendizagem, ao preconizar que se deve averiguar o que o aluno já sabe para ensinar de acordo.

Ainda nesse contexto, Ausubel (1968, *apud* MOREIRA e MASSINI, 2011) coloca que cada componente curricular possui uma estrutura articulada e hierarquicamente organizada de conceitos que constitui seu sistema de informação, devendo ser identificado pelos professores e ensinado aos alunos.

Além da existência prévia de subsunçores na estrutura cognitiva, Ausubel (*ibid.*) defende que o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo e que o sujeito precisa apresentar predisposição para aprender, sendo essas as três condições para ocorrência da aprendizagem significativa, a qual se caracteriza por um processo de interação em que os subsunçores são *âncoradouros* do novo conhecimento.

Em contrapartida, coloca que a aprendizagem mecânica acontece quando as informações são aprendidas sem interação com subsunçores, um tipo de associação, que fica arbitrária e literal na estrutura cognitiva. Nesse contexto, Moreira (2011a) atenta para o fato da aprendizagem mecânica continuar sendo mais utilizada pelos alunos e incentivada pelas escolas. O que para ele é preocupante por ser uma aprendizagem memorística, que não requer compreensão, servindo apenas para as provas. Como se observa, a estrutura cognitiva é uma estrutura dinâmica composta por subsunçores inter-relacionados e hierarquicamente organizados, a qual, segundo Ausubel, é caracterizada por dois processos principais: a *diferenciação progressiva* e a *reconciliação integradora*.

A *diferenciação progressiva* é um processo de interação em um subsunçor, que também se modifica, adquirindo novos significados, ou seja, vão progressivamente sendo diferenciado em termos de detalhe e especificidade. O segundo é a *reconciliação integradora*, em que no curso de novas aprendizagens, antigas ideias podem se relacionar, se reorganizar e adquirir novos significados, explorando-se relações de similaridades, diferenças e reconciliando discrepâncias reais ou aparentes.

Assim, Moreira (*ibid.*) argumenta, que sendo esses dois processos fundamentais na aprendizagem, nada mais óbvio do que usá-los como princípios programáticos no ensino, iniciando com um mapeamento conceitual, para identificar conceitos gerais, mais inclusivos, estruturantes e proposições-chave, numa seleção do que é importante e do que é secundário, onde os conteúdos gerais e específicos devem ser trabalhados na perspectiva de diferenciar e integrar, subindo e descendo nas hierarquias conceituais.

Dessa forma, no próximo tópico, apresenta-se uma estrutura hierarquicamente organizada de conceitos básicos, em termos de conexões e filiações, sobre o PIE o qual pode ser considerado um sistema de informação na perspectiva de favorecer uma aprendizagem significativa sobre esse tema.

2.2- Um Sistema de Informação sobre o Princípio de Inclusão-Exclusão

Na *combinatória*, contar é o conceito mais geral e, mesmo não havendo evidências de quando se iniciou o processo de contagem, sabe-se que mesmo em épocas mais primitivas, a espécie humana já possuía algum senso numérico de forma a reconhecer mais ou menos o que lhe acrescentava ou retirava nas coisas que possuía e/ou produzia.

Assim, muitos historiadores matemáticos supõem que na base empírica dessa ideia, o homem utilizou objetos concretos como pedras, nós em corda, traços em ossos, referências corporais, dentre outros utensílios como marcadores dessa contagem, até que se chegassem aos números naturais. Esses aspectos podem ser encontrados em alguns autores que enfocam a história da matemática como Ifrah (2005), Joseph (1996), Gundlach (1992), dentre outros.

Com o surgimento dos números, contar passou a ser um processo mental, mais poderoso e ilimitado. Sobre o qual Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (2006, p. 15), coloca que “contar é enumerar os elementos de um conjunto, de forma a determinar quantos são os seus elementos”. Já Merayo (2001, p. 229) afirma que “contar é uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos: o dos elementos a contar e o dos números naturais”.

Com a escrita, surge então, a criação de símbolos gráficos, os algarismos, os quais não apenas facilitaram a contagem e seu registro, como também e principalmente permitiram efetuarem-se as operações. Nesse contexto, Torres (2004) coloca que quando os problemas, no âmbito da aritmética básica, requerem uma maior dificuldade, pode-se decompor em partes mais simples, possibilitando a aplicação de dois princípios fundamentais, o Princípio Aditivo (PA) e o Princípio Multiplicativo (PM).

Para Benítez e Brañas (2001), o PA está associado a situações em que se pode realizar uma primeira etapa de m maneiras enquanto que uma segunda pode ser realizada de n maneiras e, não há como realizar as duas simultaneamente, cujo total é $m + n$ realizações. Quanto ao PM, aplica-se à situações que pode ser decomposta em duas ou mais etapas, nas quais existem m possíveis resultados para a primeira etapa e n para a

segunda, sendo essas etapas sucessivas e independentes, o procedimento total será calculado de $m \times n$ maneiras.

Admitindo-se uma formulação mediante a teoria dos conjuntos, o PM pode ser expresso pelo produto cartesiano $n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = n(A_1) \times n(A_2) \times \dots \times n(A_n)$ e o PA, pelo conceito de cardinalidade de conjuntos $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, com $A \cap B = \phi$. Mas, no caso de $A \cap B \neq \phi$, a soma das cardinalidades individuais será maior que a cardinalidade da união dos elementos, ou seja, $n(A) + n(B) > n(A \cup B)$, em decorrência da duplicidade das contagens comuns em A e B , representada por $n(A \cap B)$.

Nesse caso é necessário reformular o PA recaindo num princípio mais geral, o Princípio de Inclusão-Exclusão, que na sua forma mais simples, conforme Morgado *et al.* (2006), calcula a cardinalidade da união de dois conjuntos A e B , com $A \cap B \neq \phi$, incluindo-se inicialmente as cardinalidades individuais e excluindo-se a cardinalidade comum, $n(A \cap B)$, para não contá-los em duplicidade, uma em $n(A)$ e outra em $n(B)$, ou seja, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, ilustrado no diagrama Venn, na figura 2.

Figura 2 – Um Diagrama de Venn para representar a cardinalidade da união de dois conjuntos

Fonte: Silva (2009, p. 106)

Para três conjuntos com $A \cap B \cap C \neq \phi$, a fórmula do PIE inclui as cardinalidades individuais de A , B e C , exclui as cardinalidade de $(A \cap B)$, $(A \cap C)$ e $(B \cap C)$ para não contar em duplicidade os elementos comuns a cada dois conjuntos. Por sua vez, os elementos comuns aos três $(A \cap B \cap C)$, foram contados três vezes, em $n(A)$, em $n(B)$ e, em $n(C)$, e descontados também três vezes, em $(A \cap B)$, em $(A \cap C)$ e, em $(B \cap C)$. Ou seja, ainda não foram contados, o que poderá ser feito com a seguinte formatação $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Pode-se apresentar essa contagem, em um diagrama de Venn, conforme se pode observar na figura 3, ficando geometricamente inviável representá-la quando o número de conjuntos ultrapassar a mais de quatro conjuntos envolvidos na contagem.

Figura 3 – Um Diagrama de Venn para representar a cardinalidade da união de três conjuntos

Fonte: Silva (2009, p. 106)

Para a generalização da fórmula do PIE, basta entender que se trata da inclusão das cardinalidades individuais, exclusão das cardinalidades comuns tomadas dois a dois conjuntos, inclusão das cardinalidades três a três, exclusão das cardinalidades quatro a quatro e assim sucessivamente, daí o nome de Princípio de Inclusão-Exclusão.

Contudo, esse aspecto não é algo que deva ser automatizado, mas compreendido, de forma, a saber, quando e por que incluir ou excluir as cardinalidades, pois isso depende da dinâmica da contagem e do número de conjuntos envolvidos. Por exemplo, para calcular $n(A \cup B)$, tem-se 2 possibilidades para agrupar esses conjuntos tomando-os um a um e 1 para tomar os dois em um só grupo, $n(A \cup B) = \underbrace{n(A) + n(B)}_2 - \underbrace{n(A \cap B)}_1$.

No cálculo de $n(A \cup B \cup C)$, temos 3 possibilidades para agrupar os conjuntos tomando-os um a um, 3 para agrupá-los dois a dois e 1 para tomar os três em um grupo: $n(A \cup B \cup C) = \underbrace{n(A) + n(B) + n(C)}_3 - \underbrace{n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)}_3 + \underbrace{n(A \cap B \cap C)}_1$.

Para $n(A \cup B \cup C \cup D)$, temos 4 possibilidades para agrupá-los tomando-os um a um, 6 para agrupá-los dois a dois, 4 vezes para tomá-los três a três e 1 em grupo de quatro: $n(A \cup B \cup C \cup D) = \underbrace{n(A) + n(B) + n(C) + n(D)}_4 - \underbrace{n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D)}_6 + \underbrace{n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D)}_4 - \underbrace{n(A \cap B \cap C \cap D)}_1$.

Estendendo-se esse raciocínio para um número n de conjuntos finitos, chega-se a uma generalização sobre o PIE, apresentado segundo Santos, Mello e Murari (2007, p. 124):

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n n(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1 \leq i < j < k < p \leq n} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \dots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Figura 4 – Um mapa conceitual para demarcar o Sistema de Informação sobre o PIE

Fonte: Rufino, Silva e Ferreira (2022)

Leitura do Mapa:

A ideia de contagem pode ser historicamente compreendida a partir de dois processos, um processo empírico, no qual se utilizava de marcadores concretos para contar e um processo mental, caracterizado por marcadores abstratos (os números). A diferença está no senso numérico, em que no primeiro caso existe apenas a sensação de acréscimo ou diminuição da quantidade possuída e, no segundo, há a associação/correspondência entre os elementos a serem contados e os números naturais.

Com o aumento no número de elementos envolvidos na contagem, pode-se decompor o problema em partes, chegando-se aos princípios básicos de contagem: o Princípio Aditivo (PA) e o Princípio Multiplicativo (PM), para os quais se podem adotar uma formulação mediante a teoria dos conjuntos. No caso do PM, em que os objetos de contagem são realizações sucessivas e independentes, cabe a formulação $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$.

No entanto, para o PA, cujos objetos de contagem são realizações unitárias, ou seja, os conjuntos envolvidos são disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), a cardinalidade da união desses

conjuntos é representada pela fórmula, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Porém, se nesse último caso, os conjuntos não forem disjuntos ($A \cap B \neq \emptyset$), amplia-se para um princípio mais geral do que o PA, o Princípio de Inclusão-Exclusão (PIE), com a formulação, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Por fim, como se observa os princípios básicos de contagem sofrem reformulações e generalizações, com a necessidade de dar resposta a uma contagem que vai além da aritmética básica, dando origem ao campo da Combinatória.

3. METODOLOGIA

A pesquisa tem enfoque qualitativo, nos moldes de um estudo de caso educativo descritivo interpretativo, conforme Serrano (1998, *apud* MOREIRA, 2011b), por não se ter interesse em fazer um informe apenas descritivo, mas encontrar padrões, desenvolver categorias conceituais de análise que possibilitem ilustrar, confirmar ou opor-se a suposições teóricas levantadas.

A investigação foi realizada com 05 professores licenciados em matemática (P_A , P_B , P_C , P_D e P_E), de três escolas da cidade de Paulista-PE/BR, das redes privada e pública, com tempo de regência de no mínimo 5 anos, no Ensino Médio, no qual o conteúdo investigado (PIE) deve ser tratado, conforme os documentos oficiais de educação.

Os professores foram abordados individualmente, em períodos livres dentro da escola e tiveram um tempo máximo de 40 minutos para responder a um questionário diagnóstico (apresentado no final do texto), composto por quatro questões, não sendo permitido que levassem o questionário para casa, com o propósito de garantir a veracidade das respostas coletadas.

A estruturação das perguntas que compõem o questionário foi organizada a partir dos objetivos que se almeja atingir com cada uma delas. A primeira investiga o sistema de informação dos professores sobre o PIE, para fazer um reconhecimento de suas compreensões. Na segunda, busca-se observar se entendem por que, quando e como utilizar o PIE, diante da dificuldade ou impossibilidade de aplicar o diagrama de Venn.

Com a terceira questão, procura-se fazer um diagnóstico a respeito das principais dificuldades que enfrentam na difusão do PIE a seus alunos. Na quarta, o intento é levantar que tipos de procedimentos didáticos eles adotam como apoio ao manejo do conhecimento para dirimir as dificuldades que foram apontadas na terceira questão.

3.1 Critérios Adotados para Interpretação do Questionário Diagnóstico

- 1- Compreensão Não Adequada (CNA) - não identifica nenhum conceito básico;
- 2- Compreensão Parcialmente Adequada (CPA) - identifica 1 ou 2 dos conceitos;
- 3- Compreensão Adequada (CA) - identifica os três conceitos básicos elencados.

Questão 2- (Ia) e (Ib): Nessa questão que envolve o reconhecimento e utilização do Princípio Aditivo e sua generalização para o PIE, as respostas foram categorizadas em:

- 1- Não Respondeu (NR) - não resolveu nem nomeou a técnica utilizada;
- 2- Resposta Não Satisfatória (RNS) - resolveu de forma errada e não nomeou a técnica ou a nomeou erradamente.

3- Resposta Parcialmente Satisfatória (RPS) - resolveu a questão errado, mas nomeou a técnica corretamente ou resolveu correto, mas não nomeou ou a nomeou errada.

- 4- Resposta Satisfatória (RS) - resolveu corretamente e nomeou adequadamente.

Questão 2- (II): Nessa questão envolvendo a aplicação da fórmula do PIE foram consideradas quatro formas para qualificar as respostas na situação proposta.

- 1- Não Respondeu (NR) - não resolveu nem nomeou a técnica utilizada;
- 2- Resposta Não Satisfatória (RNS) - resolveu de forma errada e não nomeou ou resolveu e nomeou de forma errada.

3- Resposta Parcialmente Satisfatória (RPS) - não resolveu ou resolveu de forma errada a questão, porém nomeou-a corretamente ou resolveu corretamente (aplicando o PIE), mas não nomeou ou nomeou-a de forma errada.

- 4- Resposta Satisfatória (RS) - resolve aplicando o PIE corretamente e o nomeia.

Questão 3: Identificaram-se duas categorias de Dificuldades para difundir o PIE

- Relacionada ao professor (DP): desconhecer as bases conceituais (DP₁); viabilizar uma apresentação que potencialize uma aprendizagem significativa (DP₂); criar procedimentos de ensino (DP₃) e outras dificuldades relativas ao professor (DP₄).

- Relacionada aos alunos (D_a): interpretar o enunciado das questões (D_{a1}); reconhecer os fundamentos do princípio (D_{a2}); falta de interesse na aprendizagem (D_{a3}) e outras dificuldades relativa ao aluno (D_{a4}).

Questão 4: as metodologias apresentadas foram qualificadas a partir de critérios.

- 1- Metodologias que Favoreçam a Aprendizagem Significativa (MFAS) - quando propõem situações que possibilitem aos alunos relacionar de maneira não arbitrária e não literal a nova informação a uma estrutura cognitiva apropriada e relevante;

2- Metodologias que Favoreçam a Aprendizagem Mecânica (MFAM) - quando propõem situações puramente memorísticas, que não requerem compreensão, e resultam em meras aplicações a situações conhecidas.

4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os dados obtidos em cada questão foram organizados em tabelas de dupla entrada e, na sequência, serão emitidas análises sobre esses dados, considerando os critérios estabelecidos, acompanhados de alguns excertos como prova evidente desses achados.

Tabela 1 – Compreensão dos Professores sobre o PIE através das respostas da 1ª questão

Sistema de Informação Professores	Conceitos Básicos do PIE			Categorias
	CB ₁	CB ₂	CB ₃	
P _A	X			CPA
P _B				CNA
P _C	X		X	CPA
P _D				CNA
P _E				CNA
Total	2	0	1	

Legenda: CB₁ (Técnica de Contagem); CB₂ (Generalização do Princípio Aditivo); CB₃ (contar a cardinalidade da união de conjuntos não disjuntos); CNA (Compreensão Não Adequada); CPA (Compreensão Parcialmente Adequada).

Excerto 1 – Compreensão não adequada sobre a 1ª questão

Fonte: Professor P_A

Excerto 2 – Compreensão parcialmente adequada sobre a 1ª questão

Fonte: Professor P_C

Observa-se que nenhum dos professores apresenta uma compreensão adequada sobre PIE. Faz-se necessário evidenciar o fato de não conseguirem associar esse princípio ao PA, tendo em vista que o PIE é uma generalização do PA. Isso remete à ideia de que

no ato do ensino, por não possuírem um sistema de informação adequado sobre esse tema, não devem explorar seus conceitos básicos, dificultando a compreensão dos alunos em entender quando, pela dinâmica da contagem, aplicar uma ou outra técnica de contagem.

Tabela 2 – Identificação e utilização do PA segundo as respostas da 2ª questão (I_a)

Professores	Critério	Quanto a Resolução			Quanto a Nomeação			Categorização das respostas
		NR	RE	RC	NN	NE	NC	
P _A			X		X			RNS
P _B			X		X			RNS
P _C				X	X			RPS
P _D			X		X			RNS
P _E			X			X		RNS
Total		0	4	1	4	0	1	

Legenda: NR (Não Resolveu); RE (Resolveu Errado); RC (Resolveu Correto); NN (Não Nomeou); NE (Nomeou Errado); NC (Nomeou Correto); RNS (Resposta Não Satisfatória).

Tabela 3 – Generalização do PA e Identificação do PIE nas respostas da 2ª questão (I_b)

Professores	Critério	Quanto a Resolução			Quanto a Nomeação			Categorização das respostas
		NR	RE	RC	NN	NE	NC	
P _A			X		X			RNS
P _B			X		X			RNS
P _C				X	X			RPS
P _D			X		X			RNS
P _E			X		X			RNS
Total		0	4	1	4	0	1	

Legenda: NR (Não Resolveu); RE (Resolveu Errado); RC (Resolveu Correto); NN (Não Nomeou); NE (Nomeou Errado); NC (Nomeou Correto); RNS (Resposta Não Satisfatória).

Excerto 3 – Resposta Parcialmente Satisfatória sobre a Questão 2 (I_a)

Fonte: Professor P_C

Excerto 4 – Resposta Parcialmente Satisfatória sobre a Questão 2 (I_b)

Fonte: Professor P_C

O fato de nenhuma das respostas, tanto na questão 2-Ia quanto na questão 2-Ib, poder ser classificada como satisfatória e que apenas o professor (P_C) conseguiu calculá-

las, ainda que não soube nomeá-las, reforça a ideia de que o PA tem sido utilizado de forma automática, quase intuitiva, sem se perceber o porquê de seu uso.

No caso específico da questão 2-Ib se quer perceberam a necessidade de ampliação do PA para o PIE e, portanto, de sua aplicação, dado que os conjuntos envolvidos na contagem não são disjuntos. Como consequência disso, cometeram o equívoco de contar duas vezes o mesmo objeto.

Tabela 4 – Reconhecimento e Aplicação da fórmula do PIE nas respostas da 2ª questão (II)

Professores	Critérios	Quanto a Aplicação			Quanto a Nomeação			Categorização das respostas
		NA	AE	AC	NN	NE	NC	
P _A		X			X			RNS
P _B		X			X			RNS
P _C			X		X			RNS
P _D		X			X			RNS
P _E		X			X			RNS
Total		4	1	0	4	1	0	

Legenda: NA (Não Aplicou); AE (Aplicou Errado); AC (Aplicou Correto); NN (Não Nomeou); NE (Nomeou Errado); NC (Nomeou Correto); RNS (Resposta Não Satisfatória).

As respostas apresentadas, acerca do reconhecimento e aplicação da fórmula do PIE, foram classificadas como não satisfatórias. Mesmo quando se entendeu a necessidade de sua utilização, no caso do participante P_C, não se compreendeu quando incluir ou excluir as cardinalidades, impedindo o desenvolvimento adequado da formula.

Por outro lado, com a insistência no uso do diagrama de Venn, houve dificuldade na sua construção geométrica, conforme se observa nos excertos 5 e 6, por conta do número de conjuntos envolvidos na contagem ser superior a três. Por isso, os LDs quase sempre não propõem questões desse tipo com mais de três conjuntos.

Excerto 5 – Resposta Não Satisfatória sobre a Questão 2 (II)

Fonte: Professor P_E

Excerto 6 – Resposta Não Satisfatória sobre a Questão 2 (II)

II- Num colégio foram entrevistados 78 estudantes. Destes 32 estavam fazendo um curso de francês; 40 um curso de física; 30 um curso de matemática; 23 um curso de história; 19 francês e física; 13 francês e matemática; 15 física e matemática; 2 francês e história; 15 física e história; 14 matemática e história; 8 francês, física e matemática; 8 francês, matemática e história; 2 francês, física e história; 6 física, matemática e história e 2 estavam fazendo todos os quatro curso. Quantos estudantes estavam fazendo pelo menos 1 curso dos 4 mencionados ?

$F + F1 + M + H - FF1 - FM - FH$

Fonte: Professor P_C

Tabela 5 – Dificuldades na difusão do PIE nas respostas da 3ª questão

Nº de Respostas \ Critérios	Relacionadas ao professor (D _p)				Relacionadas ao aluno (D _a)			
	D _{p1}	D _{p2}	D _{p3}	D _{p4}	D _{a1}	D _{a2}	D _{a3}	D _{a4}
	1	0	0	0	2	2	1	1

Legenda: D_{p1} (desconhecer as bases conceituais); D_{p2} (potencializar aprendizagem significativa); D_{p3} (criar procedimentos de ensino); D_{p4} (outras dificuldades do professor); D_{a1} (interpretar enunciado das questões); D_{a2} (reconhecer fundamentos do princípio); D_{a3} (falta de interesse na aprendizagem); D_{a4} (outras dificuldades do aluno).

Nota-se que as dificuldades citadas pelos professores, em sua maioria, estão relacionadas muito mais com as limitações dos alunos do que com o reconhecimento de suas próprias dificuldades. Isso revela um despreparo desses professores para cumprir o papel de difusor do conhecimento, pois se há por parte dos alunos tantas dificuldades, é inegável, mediante as análises até aqui apresentadas, que sofrem interferências da pouca compreensão que tais profissionais têm acerca do conteúdo em discussão.

Excerto 7 – Dificuldades relacionadas ao aluno

3. Na sua prática docente, quais são as principais dificuldades mais apresentadas pelos alunos ao se depararem com esse tipo de problemas?

INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO E FALTA DE COMPREENSÃO BÁSICA

Fonte: Professor P_A

Excerto 8 – Dificuldades relacionadas ao aluno

3. Na sua prática docente, quais são as principais dificuldades mais apresentadas pelos alunos ao se depararem com esse tipo de problemas?

A FALTA DE INTERESSE NA APRENDIZAGEM

Fonte: Professor P_B

Tabela 6 – Metodologias utilizadas no ensino do PIE nas respostas da 4ª questão

Nº de Respostas \ Critérios	Ideias básicas do PIE	
	<i>MFAS</i>	<i>MFAM</i>
	0	5

Legenda: *MFAS* (Metodologias que Favoreçam a Aprendizagem Significativa); *FAM* (Metodologias que Favoreçam a Aprendizagem Mecânica).

Percebe-se que a grande maioria das metodologias indicadas está muito mais favorável para possibilitar a aprendizagem mecânica que a aprendizagem significativa. Tal resultado de certa forma reflete o que vários pesquisadores chamam a atenção ao afirmar que a concepção que os professores possuem sobre um dado conhecimento matemático, acaba por influenciar a maneira como o apresentam aos seus alunos.

Excerto 9 – Metodologias que Favoreçam a Aprendizagem Mecânica

Fonte: Professor P_B

Excerto 10 – Metodologias que Favoreçam a Aprendizagem Mecânica

Fonte: Professor P_C

5. CONSIDERAÇÕES EDUCACIONAIS

Retomando os objetivos que se estabeleceu para esta pesquisa, teve-se como focos principais compreender as concepções que os professores do Ensino Médio, participantes da pesquisa, possuem sobre o PIE, assim como identificar as dificuldades que possuem no processo de ensino-aprendizagem, por entender que cabe ao professor a tarefa de difundir o conhecimento.

Conforme se observou, esses professores não possuem um sistema de informação adequado sobre o PIE. Consequentemente, apresentam esse conhecimento através de um ensino que não explora a aquisição de significados, mas a automatização do uso de uma criação didática, como é o caso do diagrama de Venn, com validação

restrita, desvinculado da combinatória, seu campo de origem, seguindo a configuração de grande parte dos livros didáticos.

Mediante tais observações, as considerações finais desse estudo se centrarão em levantar algumas reflexões. Inicialmente, atenta-se para o fato de que uma aquisição conceitual adequada é algo importante para uma compreensão e aplicação correta das técnicas de contagem. Todavia, isso requer uma mudança de postura do professor, pois eles discutem muito a respeito do baixo rendimento dos alunos, mas não buscam, em sua maioria, discutir a necessidade de fortalecer suas bases epistemológicas, conceitual e metodológica nessa área.

Logo, há uma urgente necessidade de implantar e implementar formações continuadas para os professores, em que se possam discutir mais sobre as bases do conhecimento matemático de maneira que possam ampliar algumas informações, que por vezes, não são aprofundadas na graduação e que não são vistas como conteúdos a serem ensinados.

Julga-se, igualmente importante, um olhar mais crítico sobre os livros didáticos e, no caso de não parecerem “adequados”, os professores devem elaborar seus próprios textos de apoio, conforme ocorreu nessa investigação, onde se obteve descobertas importantes acerca do conteúdo estudado, que não se encontram nos livros didáticos, pelo menos nos adotados na Educação Básica.

Contudo, este estudo espera ter chamado a atenção para os equívocos cometidos pelos professores investigados, boa parte oriundos dos livros didáticos, como priorizar o uso de diagrama de Venn para resolver problemas do PIE. Além disso, trazer para o debate a necessidade de reconhecer que esse princípio possui um sistema de informação, cuja estruturação conceitual se reacionada e discriminada adequadamente como processos programáticos da matéria de ensino pode potencializar a aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. **Adquisición y retención del conocimiento**: Una perspectiva cognitiva. Barcelona: Padiós, 2002.
- BENÍTEZ, P. R. A.; BRAÑAS, J. R. F. **Introducción a la matemática aplicada**. Colección Textos Universitarios. Canarias: Litografía A. Romero S. A, 2001.
- CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique**. Paris: La Pensée Sauvage, 1991.

GUNDLACH, B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula:** Números e Numerais. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

IFRAH, G. **Os Números:** história de uma grande invenção. Tradução Stella Maria de Freitas Senra, 11ª ed. São Paulo: Globo, 2005.

JOSEPH, G. **La Cresta del Pavo Real** - las matemáticas e sus raíces no europeas. Madrid: Pirámide, 1996.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. 3ª reimpressão. São Paulo: Centauro, 2011.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem Significativa:** a teoria e textos complementares. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011a.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de pesquisa em ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011b.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 9ª ed. Rio de Janeiro: Grafica Wagner Ltda, 2006.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

SERRANO, G. P. Investigación cualitativa. In: MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011b.

SILVA, J. R. **Uso de Textos de Apoyo como Organizador Previo:** Matemáticas para la Enseñanza Fundamental y Media. 2009. 390 f. Tesis Doctoral (Programa Internacional de Doctorado Educación en Ciencias) - Universidad de Burgos, Burgos – España, 2009.

TORRES, F. J. C. **Matemática Discreta:** Iniciación al Método Matemático. Madrid: Base Universitaria – ANAYA, 2004.

Recebido em: 05/01/2022

Aprovado em: 05/02/2022

Publicado em: 08/02/2022